

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule las matrices X e Y si: $X + Y = 2A$ y $X + B = 2Y$

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones con matrices se pueden realizar, indicando en los casos afirmativos las dimensiones de la matriz D .

$$A + D = C \quad A \cdot D = C^t \quad D \cdot A = C \quad D \cdot A = C^t$$

SOCIALES II. 2015 JUNIO EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema matricial

$$\left. \begin{array}{l} X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} X + Y = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ -X + 2Y = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow 3Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$A_{(2,2)} + D = C_{(3,2)}$ No se puede, ya que para sumar matrices, éstas tienen que tener el mismo orden y la matriz resultante, también es del mismo orden.

$A_{(2,2)} \cdot D_{(2,3)} = C^t_{(2,3)}$ Si se puede, la matriz D es de orden $(2,3)$

$D_{(3,2)} \cdot A_{(2,2)} = C_{(3,2)}$ Si se puede, la matriz D es de orden $(3,2)$

$D \cdot A_{(2,2)} = C^t_{(2,3)}$ No se puede, ya que la matriz resultante debe tener tantas columnas como columnas tiene la matriz A , y $2 \neq 3$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

a) Efectúe la operación $A \cdot B^t$

b) Determine la matriz X tal que $A + 2X = B$

c) Halle la matriz Y tal que $B \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $A \cdot B^t$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz X

$$2 \cdot X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos la matriz Y

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ a + 4b = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 3 ; b = \frac{3}{2}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = (2 \ 1)$, $D = (1 \ -1 \ 2)$

a) Estudie cuáles de los siguientes productos de matrices se pueden realizar, indicando las dimensiones de la matriz resultante:

$$A \cdot B^t \quad C^t \cdot D \quad B^t \cdot D \quad D \cdot B^t$$

b) Despeje la matriz X en la ecuación $X \cdot A^{-1} + 2B = 3C^t \cdot D$, sin calcular sus elementos.

c) Calcule la matriz $A \cdot (B^t - 2D^t \cdot C)$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$A_{(3,3)} \cdot B^t_{(3,2)} \Rightarrow (3,2)$ Si se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante es de orden $(3,2)$.

$C^t_{(2,1)} \cdot D_{(1,3)} \Rightarrow (2,3)$ Si se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante es de orden $(2,3)$.

$B^t_{(3,2)} \cdot D_{(1,3)} \Rightarrow No$. No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$D_{(1,3)} \cdot B^t_{(3,2)} \Rightarrow (1,2)$ Si se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz coincide con el número de filas de la segunda matriz. La matriz resultante es de orden $(1,2)$.

b) Multiplicamos los dos términos a la derecha por la matriz A .

$$\begin{aligned} X \cdot A^{-1} + 2B = 3C^t \cdot D &\Rightarrow X \cdot A^{-1} = 3C^t \cdot D - 2B \Rightarrow X \cdot A^{-1} \cdot A = (3C^t \cdot D - 2B) \cdot A \Rightarrow \\ &\Rightarrow X \cdot I = (3C^t \cdot D - 2B) \cdot A \Rightarrow X = (3C^t \cdot D - 2B) \cdot A \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} A \cdot (B^t - 2D^t \cdot C) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 1) \right] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 0 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -9 \\ 13 & 4 \\ -17 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación $A \cdot X + B \cdot X = C$

b) Calcule A^4 y A^{80}

SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación que nos dan.

$$\begin{aligned} A \cdot X + B \cdot X = C &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a=2 \\ b=1 \\ 2a+c=3 \\ 2b+d=2 \end{array} \right\} \Rightarrow a=2; b=1; c=-1; d=0 \end{aligned}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

b)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^{80} = (A^4)^{20} = I^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Resuelva la ecuación matricial $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$

b) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcule los valores de a y b para que se verifique la ecuación $M \cdot A = A$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a+c = 0 \\ a+2c = 0 \\ 2b+d = 1 \\ b+2d = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a=0; b=1; c=0; d=-1$$

Luego, la matriz que nos piden es:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación.

$$M \cdot A = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a=2; b=1$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2

b) Resuelva la ecuación matricial: $A \cdot X + 4B = C^t$.

SOCIALES II. 2015 SEPTIEMBRE EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ -4 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -8 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ -a+2d & -b+2e & -c+2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -16 \\ 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow a=2; b=-4; c=-6; d=1; e=4; f=-5$$

Luego la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$