PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto $(1,-3)$ y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.
b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$
SOCIALES II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f''(x)$.

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} Pasa\ por\ (1,-3) \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow a + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow a + b = -1 \\ P.I.\ en\ x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1; b = -2$$

b) Calculamos la derivada de la función:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x \ ;\ g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \ y\ 2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo $g'(x)$	+	−	+
Función $g(x)$	C	D	C

$\downarrow$ Máximo (0,7) $\downarrow$ mínimo (2,3)

Sea la función *f* definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2x-1} & si \quad x\le 0\\ x^2+x & si \quad x>0\end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f*.
b) Calcule la ecuación la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.
SOCIALES II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{x}{2x-1}$ es continua y derivable para $x\le 0$; la función x^2+x es, también, continua y derivable para $x>0$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{2x-1}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0\Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(2x-1)^2} & si \quad x<0\\ 2x+1 & si \quad x>0\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=-1\\ f'(0^+)=1\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+)\Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=1^2+1=2$$

$$f'(x)=2x+1\Rightarrow f'(1)=3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=3\cdot(x-1)\Rightarrow y=3x-1$

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x - x^2$.
a) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Represéntelas gráficamente.
b) Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x) = f(x) - g(x)$
SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

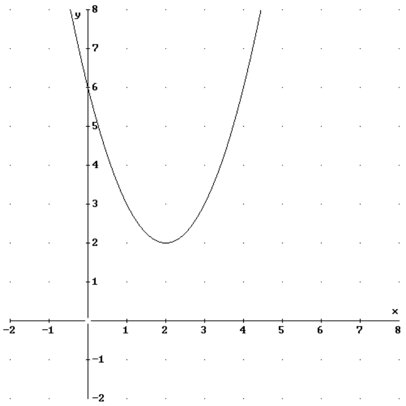
a) Para la función $f(x) = x^2 - 4x + 6$

Puntos de corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución, luego no corta al eje X.

Puntos de corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (0,6)$.

Vértice $\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \textit{vértice } (2,2)$

Curvatura $\Rightarrow y''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \textit{Convexa}$



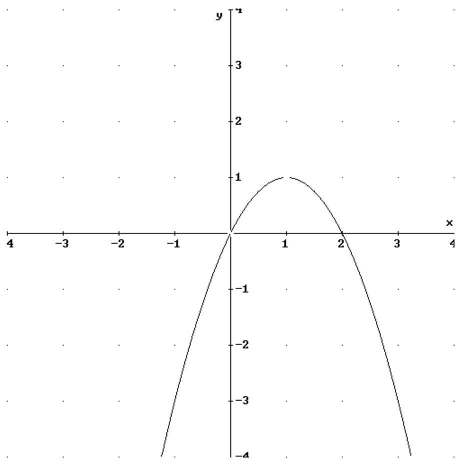
Para la función $g(x) = 2x - x^2$

Puntos de corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2 \Rightarrow (0,0)$ y $(0,2)$.

Puntos de corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$.

Vértice $\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \textit{vértice } (1,1)$

Curvatura $\Rightarrow y''(x) = -2 < 0 \Rightarrow \textit{Cóncava}$



b) Calculamos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 6 - 2x + x^2 = 2x^2 - 6x + 6$

$$h'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Signo y'	$-$	+
Función	D	C

$\downarrow$

mínimo $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\frac{1-3x}{x}+(5x-2)^3$

b) $g(x)=(x^2+2)\cdot L(x^2+2)$

c) $h(x)=3^{5x}+e^x$

SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=\frac{-3\cdot x-1\cdot(1-3x)}{x^2}+3\cdot(5x-2)^2\cdot 5=\frac{-1}{x^2}+15\cdot(5x-2)^2$

b) $g'(x)=2x\cdot L(x^2+2)+\frac{2x}{x^2+2}(x^2+2)=2x\cdot\left[L(x^2+2)+1\right]$

c) $h'(x)=5\cdot 3^{5x}\cdot L3+e^x$

Consideremos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\le 1 \\ x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) Determine la monotonía de *f* .
c) Represente gráficamente esta función.
SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función x^2-1 es continua y derivable para $x<1$; la función $x-1$ es, también, continua y derivable para $x>1$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}(x^2-1)=0 \\ \lim_{x\to 1^+}(x-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=0 \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<1 \\ 1 & si \quad x>1 \end{cases}$ y como:

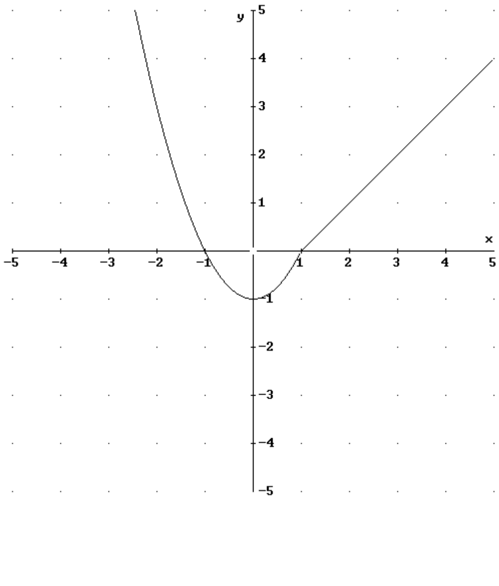
$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2 \\ f'(1^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

b) $f'(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	$-$	+	+
Función	D	C	C

c)



a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)=\dfrac{3x-2}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
b) Se considera la función $f(x)=ax^2-bx+4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto (1, 10).
SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)$

$$g(1)=\frac{1}{2}$$
$$g'(x)=\frac{3\cdot(x+1)-1\cdot(3x-2)}{(x+1)^2}\Rightarrow g'(1)=\frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}\cdot(x-1)\Rightarrow 5x-4y-3=0$

b) Calculamos la derivada de $f(x)=ax^2-bx+4$.

$$f'(x)=2ax-b$$

Pasa por $(1,10)\Rightarrow f(1)=10\Rightarrow a-b+4=10$

Extremo relativo en $(1,10)\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 2a-b=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale: $a=-6$; $b=-12$

El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función *B* definida por:

$$B(t)=\begin{cases}-t^2+7t & si\ 0\le t\le 5\\ 10 & si\ 5\le t\le 8\end{cases}$$

donde *t* indica el tiempo transcurrido en años.

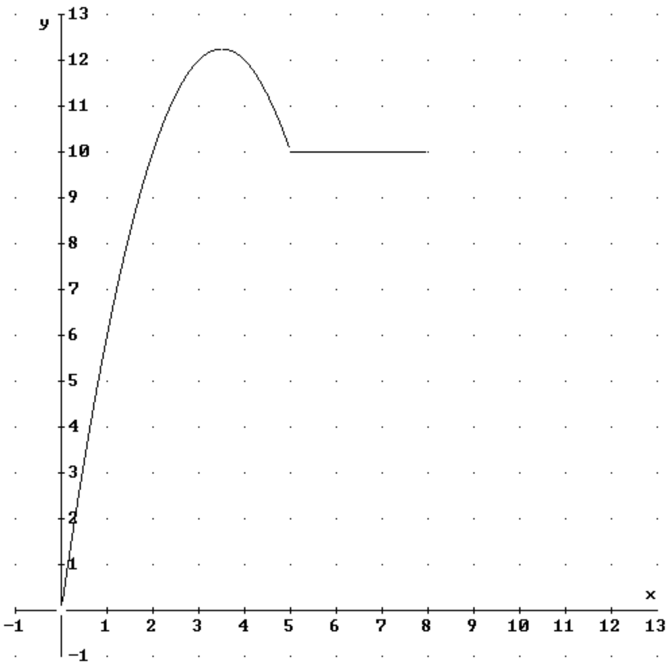
a) Represente gráficamente la función *B* y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11’25 millones de euros.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función B



Vemos que el beneficio aumenta en los 3’5 primeros años. Desde 3’5 a 5 años disminuye y entre 5 y 8 años se mantiene constante.

b) Resolvemos la ecuación $-t^2+7t=11'25 \Rightarrow t^2-7t+11'25=0 \Rightarrow t=2'5\ ;\ t=4'5$

Luego, vemos que el beneficio es de 11’25 millones de euros a los 2’5 años y a los 4’5 años.

Sea la función $f(x)=x^3-3x^2-1$
a) Determine la monotonía y los extremos relativos de f.
b) Calcule su punto de inflexión.
c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, represéntela.
SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

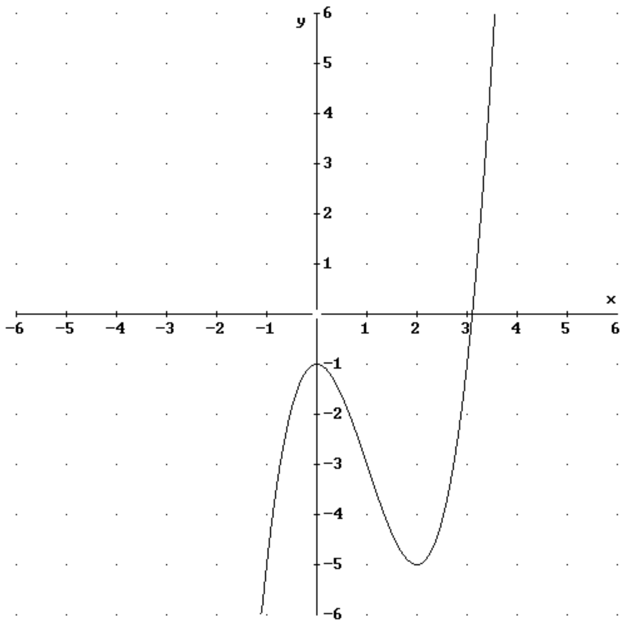
	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,-1)$ $\downarrow$ mínimo $(2,-5)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$f''(x)=6x-6=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$ El punto de inflexión está en $(1,-3)$

c) Hacemos la representación gráfica.



a) Dada la función $f(x)=a\cdot(x-1)^2+bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas $(1,2)$ y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x=2$.

b) Calcule $g''(2)$ siendo $g(x)=\dfrac{1}{x}-x$.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de $f(x)=a\cdot(x-1)^2+bx$.

$$f'(x)=2a(x-1)+b$$

Pasa por $(1,2)\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow b=2$

Extremo relativo en $x=2\Rightarrow f'(2)=0\Rightarrow 2a+b=0\Rightarrow 2a+2=0\Rightarrow a=-1$

b) Calculamos la segunda derivada de $g(x)=\dfrac{1}{x}-x$

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}-1$$

$$g''(x)=\frac{2}{x^3}\Rightarrow g''(2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

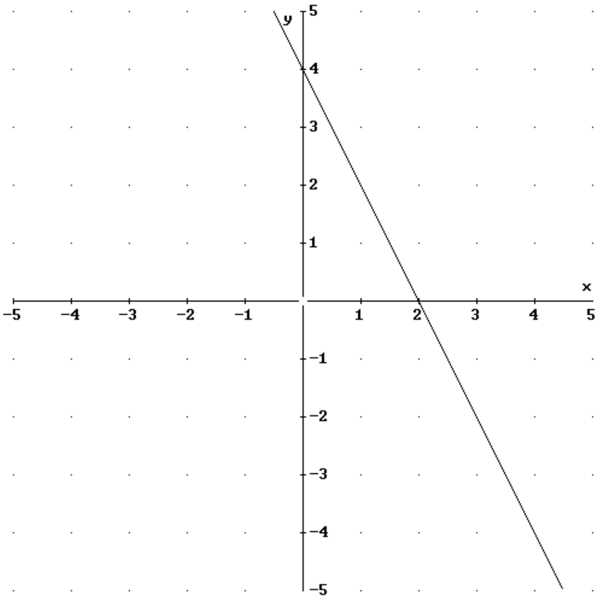
a) De una función *f* se sabe que la gráfica de su función derivada, *f* ´, es la recta de ecuación $y = -2x+4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función *f*, a la vista de la gráfica de la derivada.

b) Dada la función $g(x) = \dfrac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty, 2)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(2, \infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b) La recta tangente en $x = 0$ es $y - g(0) = g'(0)\cdot(x-0)$

$$g(0) = -1$$

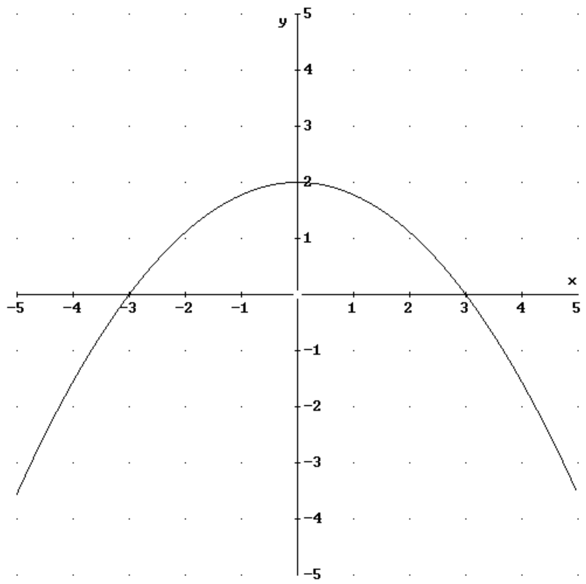
$$g'(x) = \frac{4\cdot(x+4) - 1\cdot(4x-4)}{(x+4)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+1 = \frac{5}{4}\cdot(x-0) \Rightarrow 5x-4y-4=0$

a) La gráfica de la función derivada de una función *f* es la parábola de vértice $(0,2)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$. A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*.
b) Calcule los extremos relativos de la función $g(x)=x^3-3x$.
SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-3,3)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$g'(x)=3x^2-3=0 \Rightarrow x=1 \; ; \; x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo g'	+	−	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $(-1,2)$ mínimo $(1,-2)$

Se considera la función $f(x)=\dfrac{3-x}{2-x}$
a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x=1$.
b) Estudie su monotonía.
c) Calcule sus asíntotas.
SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=\frac{2}{1}=2$$
$$f'(x)=\frac{-1\cdot(2-x)-(-1)\cdot(3-x)}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(1)=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=1\cdot(x-1)\Rightarrow x-y+1=0$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{-1\cdot(2-x)-(-1)\cdot(3-x)}{(2-x)^2}=\frac{1}{(2-x)^2}=0\Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) *Verticales*: La recta $x = a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=\infty\Rightarrow x=2$$

Horizontales: La recta $y = b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{3-x}{2-x}=1\Rightarrow y=1$$

Oblicuas: No tiene.