PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2009

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{x+1} & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Analice la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio.
b) Determine la asíntota horizontal, si la tiene.
c) Determine la asíntota vertical, si la tiene.
SOCIALES II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función x^2+x es continua y derivable para $x<0$; la función $\dfrac{x}{x+1}$ es, también, continua y derivable para $x\geq 0$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x+1}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$ y como:

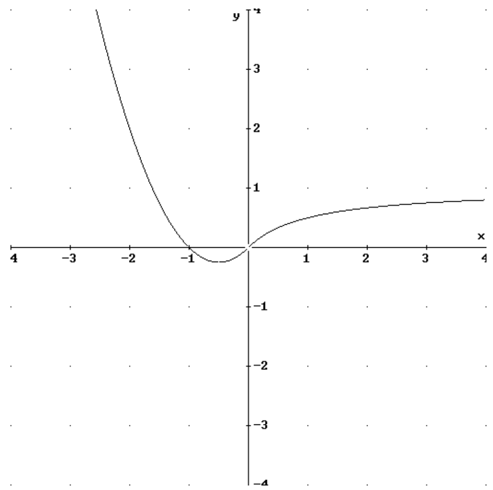
$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x=0$$

Luego la función *f(x)* es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1\Rightarrow y=1 \text{ es asíntota horizontal}$$

c) Asíntota vertical no tiene.



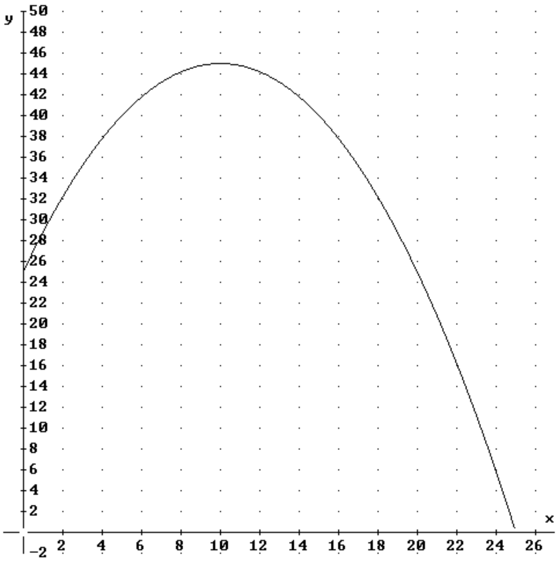
Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:

$$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25 \quad 0 \le t \le 25 \quad (t = \text{años transcurridos desde el año 2000})$$

a) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?.
b) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?.
c) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.
SOCIALES II. 2009 JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

La función es una parábola cuyo dibujo es:



a) El máximo nivel de contaminación se alcanza para $t = 10$, es decir, el año 2010.

b) El nivel de contaminación cero se alcanza para $t = 25$, es decir, el año 2025.

c) Para $t = 8 \Rightarrow C(8) = 44'2$. Calculamos la derivada para hallar la pendiente.

$$C'(t) = -0'4t + 4 \Rightarrow m = C'(8) = 0'8$$

Luego, la recta tangente es: $y - 44'2 = 0'8(x - 8) \Rightarrow y = 0'8x + 37'8$

a) Halle las funciones derivadas de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$f(x)=(2x^2-3)^3 \ ; \ g(x)=\frac{\ln(x)}{x} \ ; \ h(x)=x\cdot e^{3x}$$

b) Determine el dominio y las asíntotas de la función $m(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$

SOCIALES II. 2009 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=3\cdot(2x^2-3)^2\cdot 4x=12x\cdot(2x^2-3)^2$$

$$g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$h'(x)=1\cdot e^{3x}+3x\cdot e^{3x}=e^{3x}(1+3x)$$

b) $D=\mathbb{R}-\{4\}$

Verticales: La recta $x=a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to 4} f(x)=\infty \Rightarrow x=4$$

Horizontales: La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x-4}=2 \Rightarrow y=2$$

Oblicuas: No tiene.

a) Sea función $f(x)=\begin{cases} 1-2x & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$

Estudie su continuidad y su derivabilidad.

b) Se consideran las funciones: $g(x)=(2x+1)^3$ **,** $h(x)=\dfrac{x-1}{2^x}$ **. Halle sus funciones derivadas.**

SOCIALES II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=0$.

1) $f(0)=1$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(1-2x)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

Luego, es continua.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{-1}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-2 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

b)

$$g'(x)=3\cdot(2x+1)^2\cdot 2=6\cdot(2x+1)^2$$

$$h'(x)=\frac{1\cdot 2^x-2^x\cdot\ln 2\cdot(x-1)}{(2^x)^2}=\frac{1-\ln 2\cdot(x-1)}{2^x}$$

Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo (Kg) de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la función

$$\boldsymbol{B(x) = -x^2 + 4x - 3}$$

siendo $B(x)$ el beneficio por Kg y x el precio de cada Kg, ambos expresados en euros.
a) ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?.
b) ¿Qué precio maximiza los beneficios?.
c) Si tiene en el almacén 10.000 Kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?.
SOCIALES II. 2009 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con el eje X.

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \; ; \; x = 1$$

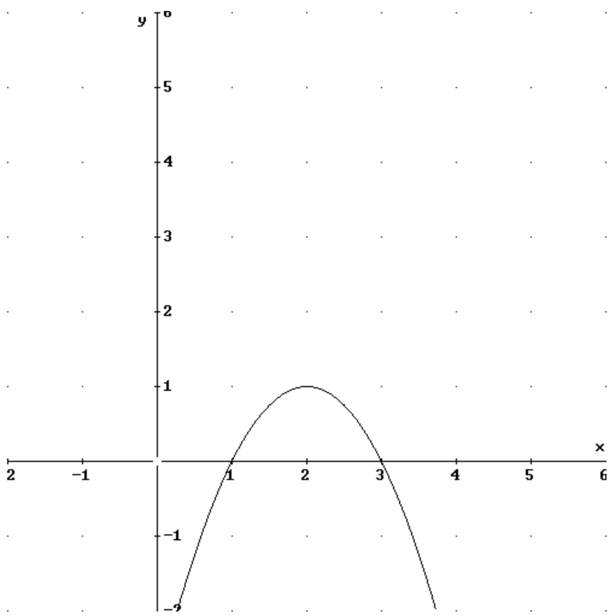
Luego, se producen beneficios para $x > 1 \; y \; x < 3$

b) Calculamos la derivada.

$$B'(x) = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Luego, para $x = 2$, se produce el máximo beneficio

c) $B(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \cdot 10.000 = 10.000$ €



Sea función $f(x)=\begin{cases} 3^x & si \quad x\le 1 \\ x^2-6x+8 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *f*.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=3$**.**

SOCIALES II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=1$.

1) $f(1)=3$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-}(3^x)=3 \\ \lim_{x\to 1^+}\left(x^2-6x+8\right)=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=3$

3) $f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=3$

Luego, es continua en $\mathbb{R}$.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 3^x\ln 3 & si \quad x<1 \\ 2x-6 & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=3\ln 3 \\ f'(1^+)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$

$f(3)=-1$

$f'(3)=0$

Sustituyendo, tenemos: $y-(-1)=0\cdot(x-3)\Rightarrow y=-1$

Sea la función $f(x) = x^3 - 1$.
a) Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.
b) Determine su curvatura y punto de inflexión.
c) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.
SOCIALES II. 2009 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1,0)$
Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0,-1)$

Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero. $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo f'	+	+
Función	C	C

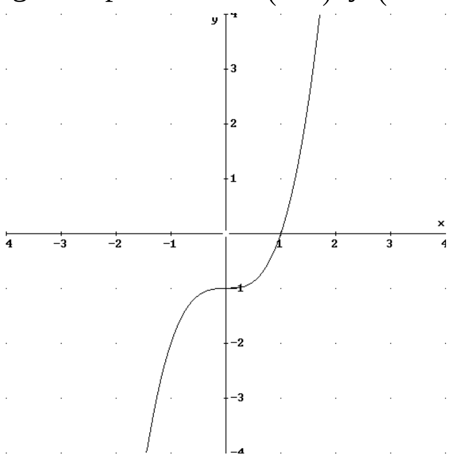
Luego la función es creciente en su dominio.

b) Calculamos la segunda derivada de la función y la igualamos a cero. $f'(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Signo f''	$-$	+
Función	Cn	Cx

Luego, la función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(0,-1)$.

c) $f'(x) = 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$. Luego, los puntos son: $(1,0)$ y $(-1,-2)$

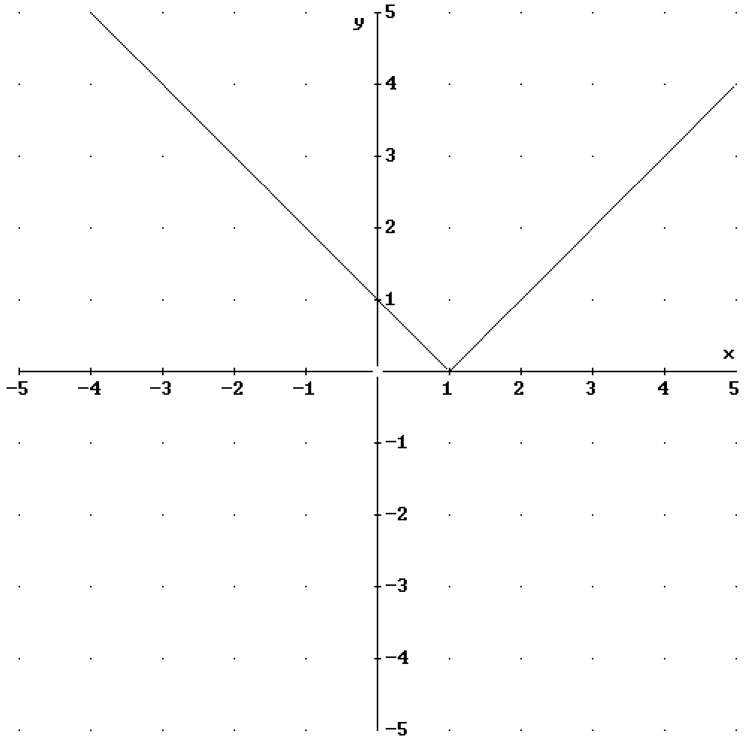


Sea función real de variable real $f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \quad x<1 \\ x-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Represente gráficamente la función.
b) Estudie la continuidad de la función.
c) Estudie la derivabilidad de la función.
SOCIALES II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de la función es:



b)

1) $f(1)=0$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(-x+1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\left(x-1\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

3) $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

Luego, es continua en $\mathbb{R}$.

c) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<1 \\ 1 & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-1 \\ f'(1^+)=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

Sea la función $f(x)=\dfrac{x-1}{2x-1}$
a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto $(0,1)$
b) Estudie la monotonía de *f*.
c) Halle las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y represente gráficamente la función.
SOCIALES II. 2009 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f'(x)=\frac{1}{(2x-1)^2}\Rightarrow f'(0)=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x+1$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero. $f'(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^2}\Rightarrow$ No tiene solución

	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Signo f'	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) *Verticales*: La recta $x=a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty\Rightarrow\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\infty\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

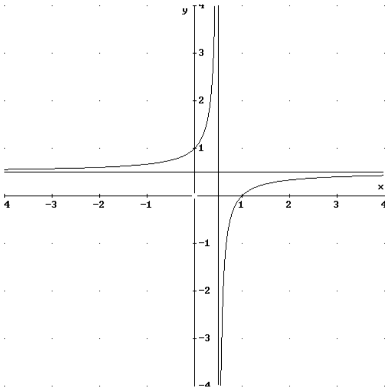
Horizontales: La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{2x-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Oblicuas: No tiene.

Corte con el eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow\dfrac{x-1}{2x-1}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow(1,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=1\Rightarrow(0,1)$



Sea función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida mediante $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & si \quad x\leq 0 \\ x^3-x+1 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) ¿Es *f* continua en $x=0$?.¿Es continua en su dominio?.
b) ¿Es *f* derivable en $x=0$?.¿Es derivable en su dominio?.
c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=1$.
SOCIALES II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=0$.

1) $f(0)=1$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-}(e^{-x})=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^3-x+1\right)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

3) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

Luego, es continua en $x=0$ y es continua en su dominio.

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -e^{-x} & si \quad x<0 \\ 3x^2-1 & si \quad x>0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-1 \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow$ es derivable en $x=0$ y es derivable en su dominio.

b) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$f(1)=1$

$f'(1)=2$

Sustituyendo, tenemos: $y-1=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x-1$

La función derivada de una función *f* viene dada por $f'(x)=3x^2-12x+9$
a) Obtenga los intervalos de monotonía de la función *f* y los valores de *x* en los que dicha función alcanza sus extremos locales.
b) Determine los intervalos de concavidad y convexidad de la función *f*.
c) Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto $(2,5)$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en dicho punto.
SOCIALES II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos a cero la primera derivada.

$$f'(x)=3x^2-12x+9=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=3$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $x=1$ $\quad\downarrow$ mínimo $x=3$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x)=6x-12=0\Rightarrow x=2$$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Signo $f''(x)$	–	+
Función	Cn	Cx

c) La recta tangente en $(2,5)$ es $y-5=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f'(2)=12-24+9=-3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-5=-3\cdot(x-2)\Rightarrow 3x+y-11=0$

Sea la función $f(x)=ax^3+bx^2+x$
a) Determine el valor de los parámetros a y b sabiendo que la función *f* tiene un máximo en $x=1$ y que $f(1)=2$.
b) Para $a=b=1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
SOCIALES II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de $f(x)=ax^3+bx^2+x$.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+1$$

$f(1)=2 \Rightarrow a+b+1=2$

Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b+1=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale: $a=-3$; $b=4$

b) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=0$$
$$f'(0)=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$