**PROBLEMAS RESUELTOS**
**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**
**2012**

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

**a) Sea la función** $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si \quad x \le 2 \\ x^2-bx-4 & si \quad x>2 \end{cases}$

**Determine los valores de *a* y *b*, para que la función *f* sea derivable en** $x=2$**.**

**b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función** $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ **en el punto de abscisa** $x=0$**.**

**SOCIALES II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} ax^2+3x=4a+6 \\ \lim_{x\to 2^+} x^2-bx-4=-2b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a+6=-2b \Rightarrow 4a+2b=-6$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & si \quad x<2 \\ 2x-b & si \quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4a+3 \\ f'(2^+)=4-b \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow 4a+3=4-b \Rightarrow 4a+b=1$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 4a+2b=-6 \\ 4a+\ \ b=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2 \ ; \ b=-7$

b) Vamos a calcular la recta tangente.

$g(0)=-2$

$$g'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+2)}{(x-1)^2} \Rightarrow m=g'(0)=-3$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente, tenemos:

$$y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0) \Rightarrow y+2=-3(x-0) \Rightarrow y=-3x-2$$

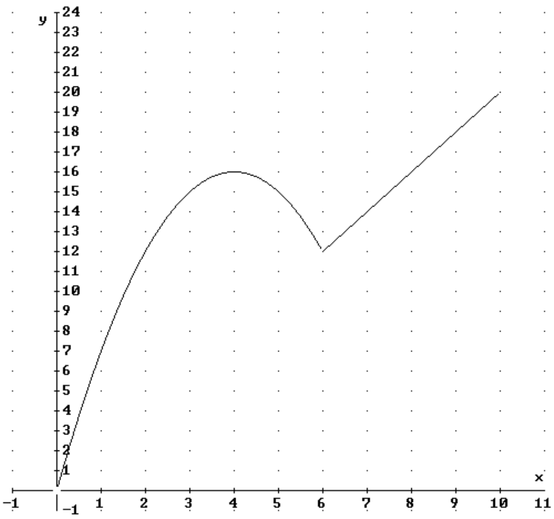
**Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función** $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si\ \ 0\le t\le 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\le 10 \end{cases}$ **, siendo t el tiempo transcurrido en años.**
**a) Calcule el valor del parámetro *a* para que *B* sea una función continua.**
**b) Para** $a=8$ **represente su gráfica e indique en qué períodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.**
**c) Para** $a=8$ **indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los primeros 6 años y a cuánto asciende su valor.**
**SOCIALES II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $t=6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 6^-} at-t^2=6a-36 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} 2t=12 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{t\to 6^-} B(t)=\lim\limits_{t\to 6^+} B(t)\Rightarrow 6a-36=12\Rightarrow a=8$$

b) Hacemos la gráfica de la función:




Vemos que la función es creciente en: $(0,4)\cup(6,10)$ y decreciente en: $(4,6)$

c) El máximo beneficio en los 6 primeros años se alcanza para $t=4$ y vale 16 millones de euros

**De la función *f* se sabe que su función derivada es $f'(x)=3x^2-8x+5$**
**a) Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.**
**b) Sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$, calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.**
**SOCIALES II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x)=3x^2-8x+5=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=\frac{5}{3}$$

| | $(-\infty,1)$ | $\left(1,\frac{5}{3}\right)$ | $\left(\frac{5}{3},\infty\right)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $f'$ | + | − | + |
| Función | C | D | C |

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,1)\cup\left(\frac{5}{3},\infty\right)$ y decreciente en el intervalo: $\left(1,\frac{5}{3}\right)$.

Tiene un máximo en el punto $x=1$ y un mínimo en $x=\frac{5}{3}$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x)=6x-8=0 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$$

| | $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$ | $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ |
|---|---|---|
| Signo $f''$ | − | + |
| Función | Cn | Cx |

La función es cóncava en $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$ y convexa en $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $x=\frac{4}{3}$

b) La ecuación de la tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-1=0(x-1)\Rightarrow y=1$

**a) Dada la función $f(x)=2x^2+ax+b$, determine los valores de $a$ y $b$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y alcanza un extremo en $x=-2$**
**b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)=3x^2-2x+1$, en el punto de abscisa $x=1$.**
**SOCIALES II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a)

Pasa por $(1,3) \Rightarrow 2\cdot 1^2+a\cdot 1+b=3 \Rightarrow a+b=1$

Extremo en $x=-2 \Rightarrow f'(-2)=0 \Rightarrow 4\cdot(-2)+a=0 \Rightarrow a=8$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $b=-7$

b) La ecuación de la tangente es: $y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)$

$g(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+1=2$

$g'(x)=6x-2 \Rightarrow g'(1)=6\cdot 1-2=4$

Sustituyendo, tenemos que:

$$y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y-2=4(x-1) \Rightarrow y=4x-2$$

**a) Para la función *f* definida de la forma $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}$ , determine, razonadamente, los valores de *a* y *b* sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x=-2$ y como asíntota horizontal la de ecuación $y=3$.**
**b) Para la función *g*, definida de la forma $g(x)=x^3-3x^2+2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.**
**SOCIALES II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Si igualamos el denominador a cero, obtenemos la asíntota vertical, luego:

$$x+b=0\Rightarrow x=-b=-2\Rightarrow b=2$$

Si calculamos el límite de la función cuando *x* tiende a $\infty$, obtenemos la asíntota horizontal, luego:

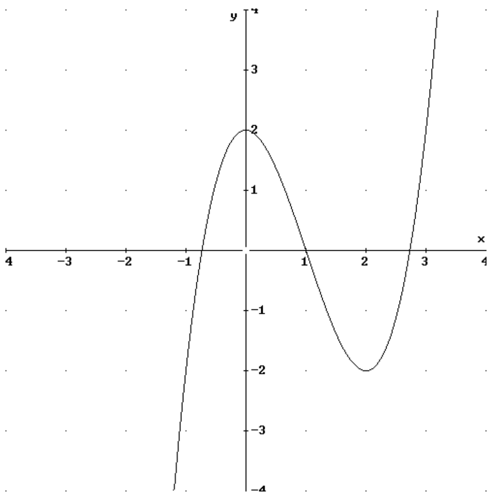
$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=a\Rightarrow a=3$$

b) Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que es una función polinómica. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$g'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

| | $(-\infty,0)$ | $(0,2)$ | $(2,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| Signo $g'(x)$ | + | – | + |
| Función | C | D | C |

Máximo $(0,2)$ Mínimo $(2,-2)$



**Sea la función** $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{x}{2}-b & si \quad x>2 \end{cases}$

**a) Calcule *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en** $x=1$

**b) Represente gráficamente la función para** $a=1.5$ **y** $b=0.5$

**SOCIALES II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

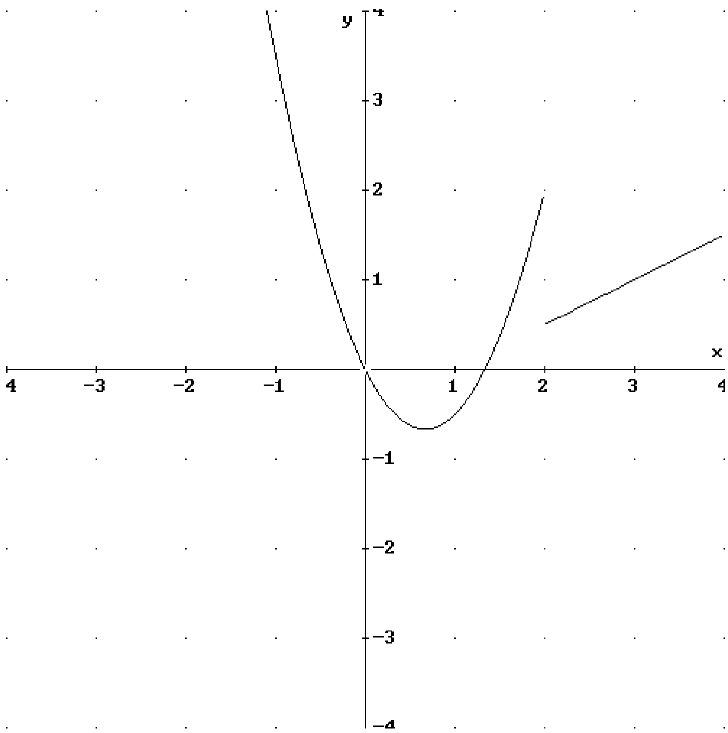
a) Para que sea continua se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} ax^2-2x=4a-4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2}-b=1-b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a-4=1-b \Rightarrow 4a+b=5$$

Si tiene un mínimo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a\cdot 1-2=0 \Rightarrow a=1$

Sustituyendo en la otra ecuación, tenemos que: $b=1$

b) Hacemos la gráfica de la función: $f(x)=\begin{cases} 1'5x^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{x}{2}-0'5 & si \quad x>2 \end{cases}$



**Se considera la función $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+2}$**
**a) Determine la monotonía y curvatura de la función**
**b) Calcule sus asíntotas**
**c) Represéntela gráficamente.**
**SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-2\}$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow No$$

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, \infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | + | + |
| Función | C | C |

La función es creciente en su dominio.
Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

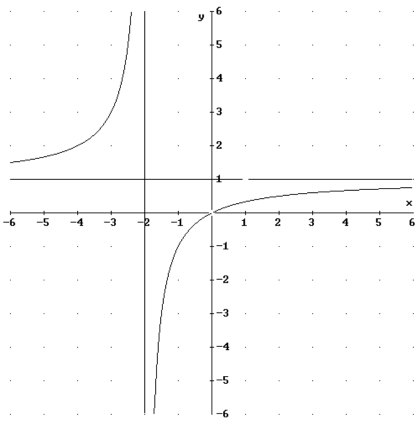
$$f''(x) = -\frac{4}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow No$$

| | $(-\infty, -2)$ | $(-2, \infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f''(x)$ | + | − |
| Función | Cx | Cn |

b) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{x}{x+2}$

La recta $x = -2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim\limits_{x \to -2} -\dfrac{2}{x+2} = \infty$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$



**Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo *t*, medido en meses:** $P(t)=\begin{cases} t^2 & si \quad 0\le t\le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & si \quad t>5 \end{cases}$

**a) Estudie la continuidad de la función *P*.**
**b) Estudie la derivabilidad de *P* en $t=5$.**
**c) Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.**
**d) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?.**
**SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en sólo en $t=5$, ya que $t^2$ es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $0\le t\le 5$; y la función $\dfrac{100t-250}{t+5}$ es continua en $\mathbb{R}-\{-5\}$ y en particular en $t>5$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} t^2=25 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{100t-250}{t+5}=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5^-}=\lim\limits_{x\to 5^+}=P(5)\Rightarrow \text{ Es continua}$$

b) Calculamos la función derivada: $P'(t)=\begin{cases} 2t & si \quad 0<t<5 \\ \dfrac{750}{(t+5)^2} & si \quad t>5 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} P'(5^-)=10 \\ P'(5^+)=7'5 \end{array}\right\} \Rightarrow P'(5^-)\ne P'(5^+)\Rightarrow \text{ No es derivable en } t=5$$

c) Estudiamos la monotonía.

$2t=0\Rightarrow t=0$.La función es creciente en $0\le t\le 5$, ya que $P'(1)=+$ . En $t=0$ tiene un mínimo absoluto o relativo.

$\dfrac{750}{(t+5)^2}=0\Rightarrow NO$. La función es creciente en $t>5$, ya que $P'(6)=+$

La función es siempre creciente, por lo tanto, el porcentaje de células afectadas crece con el tiempo.

d) $\dfrac{100t-250}{t+5}=50\Rightarrow 100t-250=50t+250\Rightarrow 50t=500\Rightarrow t=10$. Luego, a los 10 meses el porcentaje de células afectadas es 50.

**Sean dos funciones, $f$ y $g$, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x)=x+2$ y $g'(x)=2$**
**a) Estudie la monotonía de las funciones $f$ y $g$.**
**b) De lasa dos funciones $f$ y $g$ , indique, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.**
**c) ¿Cuál de las funciones $f$ y $g$ es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?.**
**SOCIALES II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x)=x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,\infty)$ |
|---|---|---|
| Signo $f'(x)$ | $-$ | $+$ |
| Función | D | C |

La función tiene un mínimo relativo en $x=-2$
Igualamos la derivada a cero.

$$g'(x)=2=0 \Rightarrow NO$$

La función es creciente ya que $g'(x)>0$

b) Solamente la función f tiene derivada nula, ya que tiene un mínimo relativo en $x=-2$.

c) La función g es una función polinómica de primer grado ya que al hacer la derivada queda un número.

**Calcule las derivadas de las siguientes funciones:**

**a)** $f(x)=e^{3x}\cdot \ln(2x-5)$

**b)** $g(x)=\dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$

**c)** $h(x)=(3x^2+5x-1)^6+x^2-\ln x$

**SOCIALES II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=3e^{3x}\cdot \ln(2x-5)+e^{3x}\cdot \dfrac{2}{2x-5}$

b) $g'(x)=\dfrac{2\cdot 3^{2x}\cdot \ln 3(x^2-1)-2x\cdot 3^{2x}}{(x^2-1)^2}$

c) $h'(x)=6\cdot(3x^2+5x-1)^5\cdot(6x+5)+2x-\dfrac{1}{x}$

**Determine los valores que han de tomar *a* y *b* para que la función**

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax-7 & si \quad x<1\\ 4x-b & si \quad x\geq 1\end{cases} \text{ sea derivable en } \mathbb{R}.$$

**SOCIALES II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} -x^2+ax-7=-1+a-7=a-8\\ \lim\limits_{x\to 1^+} 4x-b=4-b\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow a-8=4-b \Rightarrow a+b=12$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}-2x+a & si \quad x<1\\ 4 & si \quad x>1\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=-2+a\\ f'(1^+)=4\end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+) \Rightarrow -2+a=4 \Rightarrow a=6$$

Luego, los valores son: $a=6$ ; $b=6$

**En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en Km², viene dada por la función $f(t)=\dfrac{11t+20}{t+2}$, siendo $t$ el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla.**
**a) ¿Cuál es la superficie afectada inicialmente, cuando empezamos a medirla**
**b) Estudie si la mancha crece o decrece con el tiempo**
**c) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha?**
**SOCIALES II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(0)$

$$f(0)=\frac{11\cdot 0+20}{0+2}=10\ km^2$$

b) Calculamos la derivada de la función

$$f'(t)=\frac{11\cdot(t+2)-1\cdot(11t+20)}{(t+2)^2}=\frac{2}{(t+2)^2}$$

Como $f'(t)$ es positiva para cualquier valor de t, la función es creciente y, por lo tanto, la mancha crece con el tiempo.

c) Calculamos la asíntota horizontal

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{11t+20}{t+2}=\frac{\infty}{\infty}=11$$

Luego, la extensión de la mancha será como máximo de $11\ km^2$.