PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2013

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Los beneficios de una empresa en sus primeros 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$$B(t)=\frac{t^3}{4}-3t^2+9t \qquad 0\le t\le 8$$

donde la variable *t* indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.
a) Estudie la monotonía y los extremos de $B(t)$.
b) Dibuje la gráfica de $B(t)$ en el intervalo $[0,8]$ y explique, a partir de ella, la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.
SOCIALES II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $B'(t)=\frac{3t^2}{4}-6t+9=0\Rightarrow t=2\ ;\ t=6$

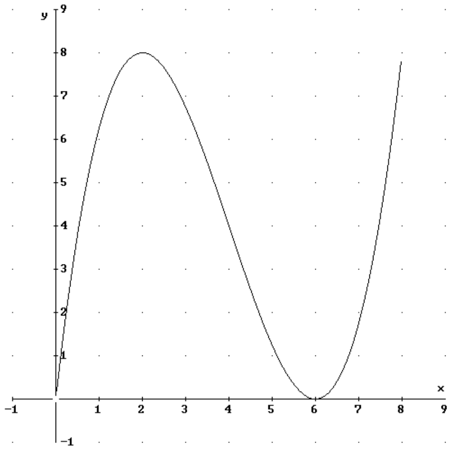
	$(0,2)$	$(2,6)$	$(6,8)$
Signo B'	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(0,2)\cup(6,8)$ y decreciente en el intervalo: $(2,6)$.
Tiene un máximo relativo en el punto $(2,8)$ y un mínimo relativo en $(6,0)$.

Calculamos los extremos absolutos. Para ello vemos los valores que toma la función en los extremos del intervalo $[0,8]$.

- $B(0)=0$
- $B(8)=8$

Por lo tanto, el máximo absoluto es 8 y se alcanza para $t=2$ y $t=8$. El mínimo absoluto es 0 y se alcanza para $t=0$ y $t=6$
b) Hacemos la gráfica de la función:

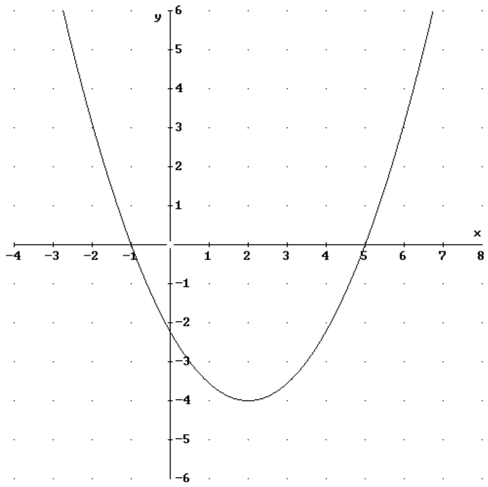


Viendo la gráfica, observamos que los beneficios crecen en los años $(0,2)\cup(6,8)$ y decrecen en $(2,6)$.

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(5,0)$ y con vértice $(2,-4)$.
a) Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.
b) Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la grafica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$, sabiendo que $f(2)=5$.
SOCIALES II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Esbozamos la gráfica con los datos que nos dan:



a) Viendo la gráfica se deduce que:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,5)$	$(5,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función $f(x)$	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$ y decreciente en el intervalo: $(-1,5)$.

b) Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=-1$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=5$.

c) La recta tangente en $x=2$, es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$.

- $f(2)=5$
- $f'(2)=-4$

Sustituyendo, tenemos: $y-5=-4\cdot(x-2)\Rightarrow y=-4x+13$

Estudie la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ 1 & si \quad 0<x\le 3 \\ -x^2+6x+2 & si \quad x>3 \end{cases}$

SOCIALES II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función exponencial e^x es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Las funciones: 1 y $-x^2+6x+2$, son funciones polinómicas y, también, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, sólo debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$ y $x=3$.

Estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} = \lim\limits_{x\to 0^+} = f(0)=1 \Rightarrow \text{ Es continua en } x=0$$

Estudiamos la continuidad en $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} (-x^2+6x+2) = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} \ne \lim\limits_{x\to 3^+} \Rightarrow \text{ No es continua en } x=3 \text{ y, por lo tanto, tampoco es derivable.}$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=0$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<0 \\ 0 & si \quad 0<x<3 \\ -2x+6 & si \quad x>3 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \ne f'(0^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=0$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0,3\}$

Sea la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x\leq 1 \\ x^2-6x+6 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.
SOCIALES II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\dfrac{1}{2-x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$. La función polinómica x^2-6x+6 es continua y derivable en $\mathbb{R}$ .Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2-x}=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x^2-6x+6=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} = \lim\limits_{x\to 1^+} = f(1) \Rightarrow \text{Es continua en } x=1$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & si \quad x<1 \\ 2x-6 & si \quad x>1 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=1 \\ f'(1^+)=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=1$$

Por lo tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) La recta tangente en $x=0$, es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

- $f(0)=\dfrac{1}{2}$
- $f'(0)=\dfrac{1}{4}$

Sustituyendo, tenemos: $y-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\cdot(x-0)\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} -x^2+6x-5 & si \quad 2\le x\le 4 \\ -2x+11 & si \quad 4<x\le 5 \end{cases}$

a) Estudie la derivabilidad de la función $f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=4$**.**

b) Represente gráficamente la función $f(x)$ **e indique dónde alcanza su máximo y su mínimo absolutos. ¿Cuál es el valor del máximo? ¿Y del mínimo?**

SOCIALES II. 2013 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

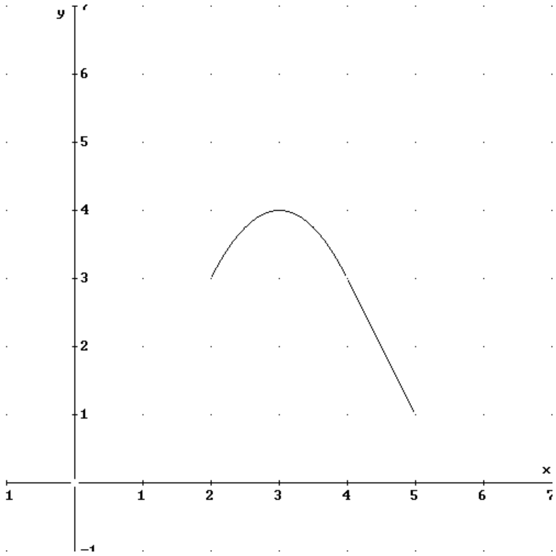
a) Estudiamos la continuidad en $x=4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} -x^2+6x-5=3 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} -2x+11=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=3 \Rightarrow \text{ La función es continua en } x=4$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -2x+6 & si \quad 2\le x<4 \\ -2 & si \quad x>4 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(4^-)=-2 \\ f'(4^+)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(4^-)=f'(4^+)=-2 \Rightarrow \text{ La función es derivable en } x=4$$

b) Representamos la función.



Máximo absoluto $(3,4)$, mínimo absoluto $(5,1)$

Sea la función $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+3$

a) Determine sus máximos y mínimos relativos.

b) Consideremos la función $g(x)=f'(x)$. Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)$, en el punto de abscisa $x=2$.

c) Dibuje la gráfica de $g(x)$ y de la recta tangente calculada en b).

SOCIALES II. 2013 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=x^2+x-2=0 \Rightarrow x=-2\ ;\ x=1$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
Signo B'	+	−	+
Función	C	D	C

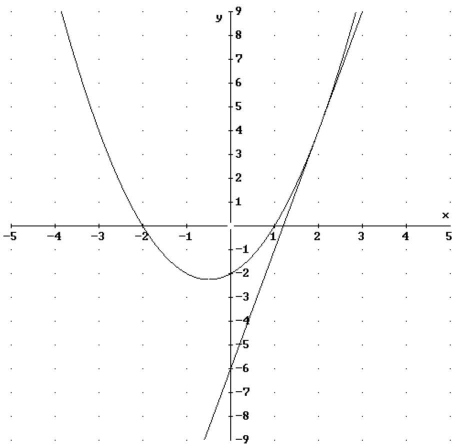
Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-2,\frac{19}{3}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(1,\frac{11}{6}\right)$.

b) La ecuación de la tangente es: $y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2)$

$$g(2)=2^2+2-2=4$$
$$g'(x)=2x+1 \Rightarrow g'(2)=2\cdot 2+1=5$$

Sustituyendo, tenemos que: $y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y-4=5(x-2) \Rightarrow y=5x-6$

c) Dibujamos las dos funciones:



Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-12 & si \quad x<-3 \\ -x+3 & si \quad -3\le x\le 2 \\ x-1 & si \quad x>2 \end{cases}$ **a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en su dominio.**   **b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**   **c) Calcule los extremos relativos.**   **SOCIALES II. 2013 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $2x^2-12$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función polinómica $-x+3$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función polinómica $x-1$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=-3$ y $x=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=-3$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -3^-} 2x^2-12=6 \\ \lim\limits_{x\to -3^+} -x+3=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to -3^-} = \lim\limits_{x\to -3^+} = f(-3)=6 \Rightarrow \text{Es continua en } x=-3$$

Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} -x+3=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} = \lim\limits_{x\to 2^+} = f(2)=1 \Rightarrow \text{Es continua en } x=2$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=-3$ y $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 4x & si \quad x<-3 \\ -1 & si \quad -3<x<2 \\ 1 & si \quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-3^-)=-12 \\ f'(-3^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-3^-)\ne f'(-3^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=-3$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-1 \\ f'(2^+)=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=2$$

Por lo tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{-3,2\}$.

b y c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $4x=0\Rightarrow x=0$, que no está en su dominio.

	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$-$	$+$
Función	D		C

Tiene un mínimo relativo en $(2,1)$.

Sea la función $f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$
a) Halle los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.
b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de en el punto de abscisa $x = -2$
c) En el punto de abscisa $x = 1$, ¿la función es creciente o decreciente?
SOCIALES II. 2013 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 48 = 0 \Rightarrow x = 8$, que no está en su dominio.

	$(-\infty, 8)$	$(8, +\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	$+$
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 8)$ y convexa en el intervalo $(8, +\infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(8, -992)$.

b) La ecuación de la tangente es: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2)$

$$f(-2) = (-2)^3 - 24 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -112$$
$$f'(x) = 3x^2 - 48x + 4 \Rightarrow f'(-2) = 12 + 96 + 4 = 112$$

Sustituyendo, tenemos que: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Rightarrow y + 112 = 112(x + 2) \Rightarrow y = 112x + 112$

c) Calculamos la primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 48x + 4 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 48 \cdot 1 + 4 = -41 < 0 \Rightarrow \text{ es decreciente}$$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $\boldsymbol{f(x)=\dfrac{(x^2-5)^3}{3-x^2}}$

b) $\boldsymbol{g(x)=e^{7x}\cdot(x-5x^2)^2}$

c) $\boldsymbol{h(x)=\dfrac{x\cdot\ln(1-x^2)}{x-3}}$

SOCIALES II. 2013 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=\dfrac{3\cdot(x^2-5)^2\cdot 2x\cdot(3-x^2)-(-2x)\cdot(x^2-5)^3}{(3-x^2)^2}=\dfrac{2x\cdot(x^2-5)^2\cdot(4-2x^2)}{(3-x^2)^2}$

b) $g'(x)=7\cdot e^{7x}\cdot(x-5x^2)^2+e^{7x}\cdot 2(x-5x^2)\cdot(1-10x)=e^{7x}\cdot(x-5x^2)\cdot\left(-35x^2-13x+2\right)$

c)

$$h'(x)=\frac{\left[1\cdot\ln(1-x^2)+x\cdot\dfrac{-2x}{1-x^2}\right]\cdot(x-3)-1\cdot x\cdot\ln(1-x^2)}{(x-3)^2}=$$

$$=\frac{\left[(1-x^2)\cdot\ln(1-x^2)-2x^2\right]\cdot(x-3)-(1-x^2)\cdot x\cdot\ln(1-x^2)}{(1-x^2)(x-3)^2}$$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & si \quad x<1 \\ -x^2+4x-3 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Determine el dominio y estudie la continuidad de la función.
b) Obtenga los extremos de la función.
c) Estudie su curvatura.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica x^3-1 es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función polinómica $-x^2+4x-3$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$ .Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=1$.
Estudiamos la continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} x^3-1=0 \\ \lim_{x\to 1^+} -x^2+4x-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} = \lim_{x\to 1^+} = f(1)=0 \Rightarrow \text{ Es continua en } x=1$$

Por lo tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=3x^2=0 \Rightarrow x=0$.
$f'(x)=-2x+4=0 \Rightarrow x=2$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f''(x)$	+	+	+	−
Función	C	C	C	D

La función tiene un máximo en $(2,1)$.

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x=0 \Rightarrow x=0$.
$f''(x)=-2$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	−	+	−
Función	Cn	Cx	Cn

La función es cóncava en el intervalo $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y es convexa en el intervalo $(0,1)$. Tiene un punto de inflexión en $(0,-1)$ y otro en $(1,0)$

En una empresa el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t)=\dfrac{11t+17}{2t+12}$, $t\geq 1$, donde t es el número de días trabajados.
a) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?
b) ¿Qué ocurrirá con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?
c) El dueño de la empresa cree que el número de montajes aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.
d) Dibuje la grafica de la función.
SOCIALES II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $M(1)=\dfrac{11\cdot 1+17}{2\cdot 1+12}=\dfrac{28}{14}=2$. Se realizan 2 montajes el primer día.

$5=\dfrac{11t+17}{2t+12}\Rightarrow 10t+60=11t+17\Rightarrow t=43$. Se necesitan 43 días.

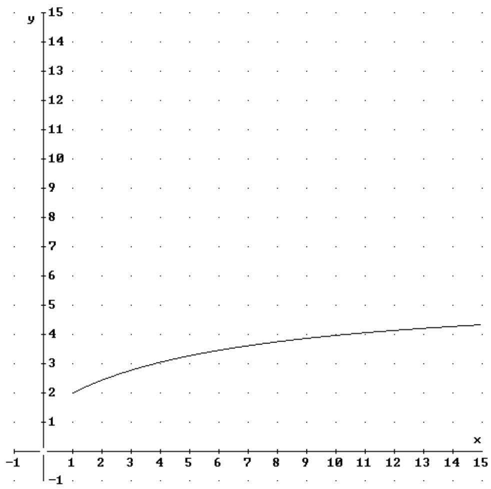
b) Calculamos $\lim\limits_{t\to\infty} M(t)=\dfrac{11t+17}{2t+12}=\dfrac{11}{2}=5'5$. Luego, si se trabaja indefinidamente se obtienen 5’5 montajes diarios.

c) Calculamos la derivada de la función.

$$M'(t)=\frac{11(2t+12)-2\cdot(11t+17)}{(2t+12)^2}=\frac{98}{(2t+12)^2}=0\Rightarrow No$$

Vemos que $M'(t)>0$ para cualquier valor de t, luego, la función es creciente y, por lo tanto, el dueño de la empresa lleva razón.

d) Dibujamos la función



Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-bx+1 & si \quad x\le 2 \\ 2x+a & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en $x=2$ y, además, tenga un mínimo en $x=1$.
b) Para $a=2$ y $b=6$, determine la ecuación de la recta tangente a la grafica de la función en el punto de abscisa $x=-2$.
SOCIALES II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x^2-bx+1=4-2b+1=5-2b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} 2x+a=4+a \end{array}\right\} \Rightarrow 5-2b=4+a \Rightarrow a+2b=1$$

Como tiene un mínimo en $x=1$, la primera derivada en ese punto debe valer cero, luego:

$$f'(1)=0\Rightarrow 2\cdot 1-b=0\Rightarrow b=2$$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos que: $a+2\cdot 2=1\Rightarrow a=-3$

b) La función es: $f(x)=\begin{cases} x^2-6x+1 & si \quad x\le 2 \\ 2x+2 & si \quad x>2 \end{cases}$. Calculamos la recta tangente en $x=-2$

$f(-2)=(-2)^2-6\cdot(-2)+1=17$

$f'(x)=2x-6\Rightarrow f'(-2)=2\cdot(-2)-6=-10$

$$y-f(-2)=f'(-2)\cdot(x+2)\Rightarrow y-17=-10(x+2)\Rightarrow y=-10x-3$$