

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

La función de beneficios f , en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x , en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por

$$f(x) = -2x^2 + 36x + 138 \quad x \geq 0$$

- a) Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.
 b) Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.
 c) Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, x , el beneficio es de 138 mil euros?.

SOCIALES II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = -4x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9$

| | | |
|---------------|-------|--------|
| | (0,9) | (9,+∞) |
| Signo $f'(x)$ | + | - |
| Función | C | D |

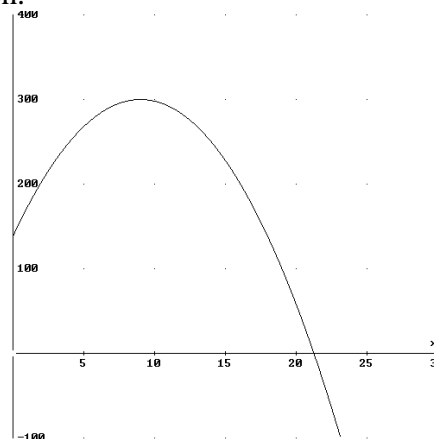
La función es creciente en el intervalo: (0,9) y decreciente en el intervalo: (9,+∞).

Tiene un máximo relativo en el punto (9,300)

Luego, la inversión que maximiza el beneficio es $x = 9$ mil € y el beneficio óptimo es $f(9) = 300$ mil €.

- b) $f'(7) = -4 \cdot 7 + 36 = 8 > 0$. Al ser positivo el valor de la derivada de esta función en ese punto, nos indica que la función es creciente en dicho punto.

- c) Hacemos el dibujo de la función:



Calculamos para que valores de x el beneficio es de 138 mil €.

$$f(x) = -2x^2 + 36x + 138 = 138 \Rightarrow -2x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 18$$

Luego, se obtiene un beneficio de 138 mil € con una inversión de 0 mil € y 18 mil €.

$$\text{Sea la función } f \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

b) Para $a = 48$ y $b = 3$, estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.

SOCIALES II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $-bx^2 - bx + a$ es continua y derivable en \mathbb{R} . La función racional $\frac{60}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. Por lo tanto, sólo debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 2$.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} -bx^2 - bx + a = -4b - 2b + a = -6b + a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{60}{x} = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow -6b + a = 30$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$

$$\text{Calculamos la función derivada: } f'(x) = \begin{cases} -2bx - b & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{60}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = -4b - b = -5b \\ f'(2^+) = -\frac{60}{4} = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow -5b = -15$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, tenemos que: $a = 48$ y $b = 3$

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} -6x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{60}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$$-6x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

| | | | |
|---------------|--------------------------------------|--------------------------------|----------------|
| | $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ | $(2, +\infty)$ |
| Signo $f'(x)$ | + | - | - |
| Función | C | D | D |

La función es creciente en el intervalo: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ y decreciente en el intervalo: $\left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{195}{4}\right)$

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

a) Estudie la monotonía de f y halle los extremos relativos que posea.

b) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.

c) Represente la gráfica de la función f .

SOCIALES II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$

| | | |
|---------------|------------------|------------------|
| | ($-\infty, 1$) | ($1, +\infty$) |
| Signo $f'(x)$ | + | + |
| Función | C | C |

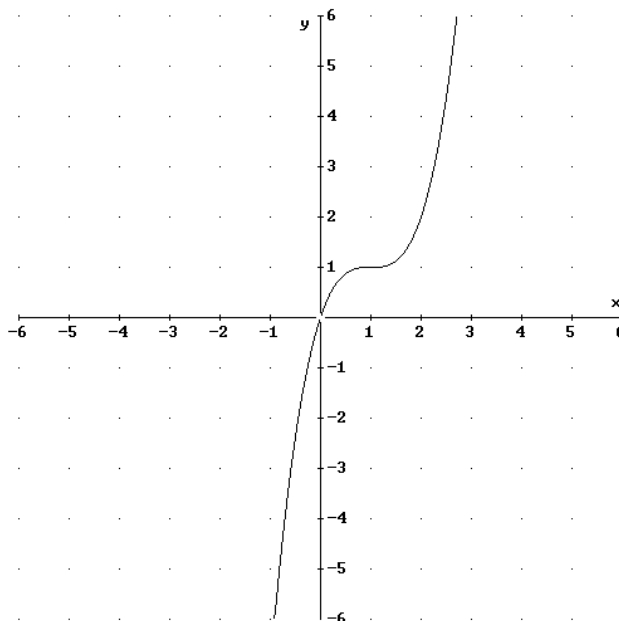
La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Por lo tanto, la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

| | | |
|----------------|------------------|------------------|
| | ($-\infty, 1$) | ($1, +\infty$) |
| Signo $f''(x)$ | - | + |
| Función | Cn | Cx |

La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty, 1)$ y convexa en el intervalo $(1, +\infty)$. Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en $(1, 1)$.

c) Hacemos el dibujo de la función:



$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio
b) Determine sus asíntotas, en caso de que existan.
c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$.
- SOCIALES II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\frac{4}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$. La función polinómica $(x+1)^2$ es continua y derivable en \mathbb{R} . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x = 1$.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{x} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{Es continua en } x = 1$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$

$$\text{Calculamos la función derivada: } f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 1 \\ -\frac{4}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ y como:}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 4 \\ f'(1^+) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x = 1$$

Por lo tanto, la función es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) La función polinómica $(x+1)^2$ no tiene asíntotas. La función racional $\frac{4}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, pero no está en su dominio. Además tiene una asíntota horizontal $y = 0$, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = \frac{4}{\infty} = 0$$

c) La recta tangente en $x = 2$, es: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$.

$$\begin{aligned} - f(2) &= 2 \\ - f'(2) &= -1 \end{aligned}$$

Sustituyendo, tenemos: $y - 2 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$

Sea la función $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + bx - 1$

a) Halle los valores de a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto $(0, 0)$.

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

SOCIALES II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + bx - 1$.

$$f'(x) = -6x^2 - a \cdot e^{-x} + b$$

$$\text{Pasa por } (0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$$

$$\text{Mínimo en } x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow -a + b = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale: $a = 1$; $b = 1$

b) La recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$

$$f(-1) = 0$$

$$f'(-1) = -5$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = -5 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = -5x - 5$

Sea la función f , definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 5 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en $x = 0$
SOCIALES II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable en $x = 0$, tiene que ser continua en ese punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - ax + 5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + b) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow b = 5$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x - a & \text{si } x < 0 \\ -2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Como la función es derivable en $x = 0$,

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -a \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a = 0$$

Luego, los valores son: $a = 0$; $b = 5$

Sea la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Determine los valores de a y b , sabiendo que dicha función es derivable.

b) Para $a = 2$ y $b = 3$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa $x = 1$.

SOCIALES II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\frac{x+b}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. La función polinómica $x^2 + ax$ es continua y derivable en \mathbb{R} . Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x = 2$.

Estudiamos la continuidad en $x = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+b}{x-1} = 2 + b \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 + 2a = 2 + b \Rightarrow 2a - b = -2$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 2$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{-1-b}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y como es derivable, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = -1 - b \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) = f'(2^+) \Rightarrow 4 + a = -1 - b \Rightarrow a + b = -5$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a = -\frac{7}{3}$; $b = -\frac{8}{3}$

b) La recta tangente en $x = 1$, es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$.

- $f(1) = 3$

- $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow f'(1) = 4$

Sustituyendo, tenemos: $y - 3 = 4 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 4x - 1$

El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t , mediante la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \quad 6 \leq t \leq 12$$

- a) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?
b) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

SOCIALES II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $S(6) = 660 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 30$. Luego, sintonizan un 30 % de personas al comenzar la emisión.

$S(12) = 660 - 231 \cdot 12 + 27 \cdot 12^2 - 12^3 = 48$. Luego, sintonizan un 48 % de personas al cierre de la emisión.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 7 ; t = 11$$

Calculamos los valores de $S(t)$, para 6,7,11 y 12.

$$S(6) = 30 ; S(7) = 23 ; S(11) = 55 ; S(12) = 48$$

Luego, vemos que el máximo de audiencia es del 55% y se alcanza a las 11 horas. El mínimo de audiencia es del 23% y se alcanza a las 7 horas.

Sean las funciones: $f(x) = (2x^2 - 1)^3 \ln(x^4)$ y $g(x) = \frac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$

Determine el valor de $f'(-1)$ y de $g'(0)$

SOCIALES II. 2014 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x) = 3 \cdot (2x^2 - 1)^2 \cdot 4x \cdot \ln(x^4) + \frac{4x^3}{x^4} \cdot (2x^2 - 1)^3 \Rightarrow f'(-1) = 0 + \frac{-4}{1} \cdot 1^3 = -4$$

$$g'(x) = \frac{(-2+2x) \cdot e^{-2x+x^2} \cdot (x^2+1) - 2x \cdot e^{-2x+x^2}}{(x^2+1)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{-2 \cdot 1}{1} = -2$$

Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

SOCIALES II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Dominio: como es una función polinómica su dominio es \mathbb{R} .

Corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0$. Luego, corta en el punto $(0, 0)$.

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Luego, corta en el punto $(0, 0)$.

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

| | | |
|---------------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| Signo $f'(x)$ | + | + |
| Función | C | C |

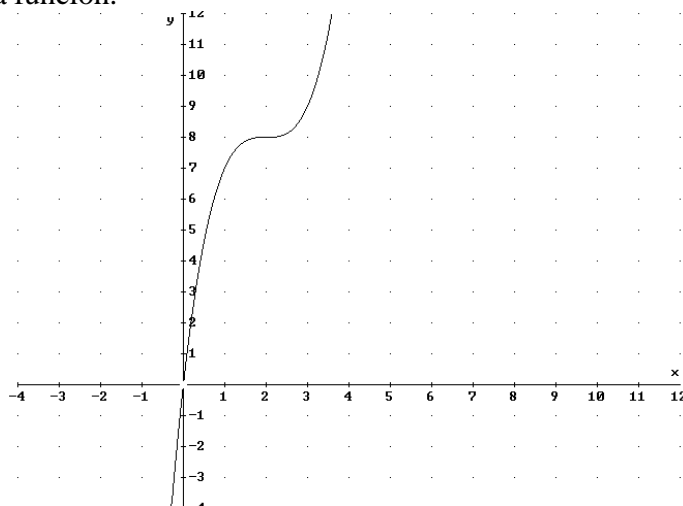
La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Por lo tanto, la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

| | | |
|----------------|----------------|----------------|
| | $(-\infty, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| Signo $f''(x)$ | - | + |
| Función | Cn | Cx |

La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, +\infty)$. Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en $(2, 8)$.

Hacemos el dibujo de la función:



Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por $B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6$, con $0 \leq t \leq 10$.

a) ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo ($t = 0$) y al final del décimo año ($t = 10$) .

b) ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles fueron sus cuantías?
SOCIALES II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $B(0) = -6$. Luego, para $t = 0$ ha tenido unas pérdidas de 6.000 €.

$B(10) = 14$. Luego, para $t = 10$ ha tenido unas ganancias de 14.000 €.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$B'(t) = 6t^2 - 72t + 162 = 0 \Rightarrow t = 3 ; t = 9$$

Calculamos los valores de $B(t)$, para 0,3,9 y 10.

$$B(0) = -6 ; B(3) = 210 ; B(9) = -6 ; B(10) = 14$$

Luego, vemos que el máximo beneficio es de 210.000 € y se alcanza para $t = 3$. El mínimo beneficio es de -6.000 € y se alcanza para $t = 0$ y $t = 9$.

Sea la función $f(x) = -x^2 + px + q$

a) Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto $(-4, -5)$ y presente un máximo en el punto de abscisa $x = -1$. Determine el valor de $f(x)$ en ese punto.

b) Represente la gráfica de f para $p = 2$ y $q = -1$ y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa $x = -2$.

SOCIALES II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = -2x + p$ y aplicamos los datos del problema:

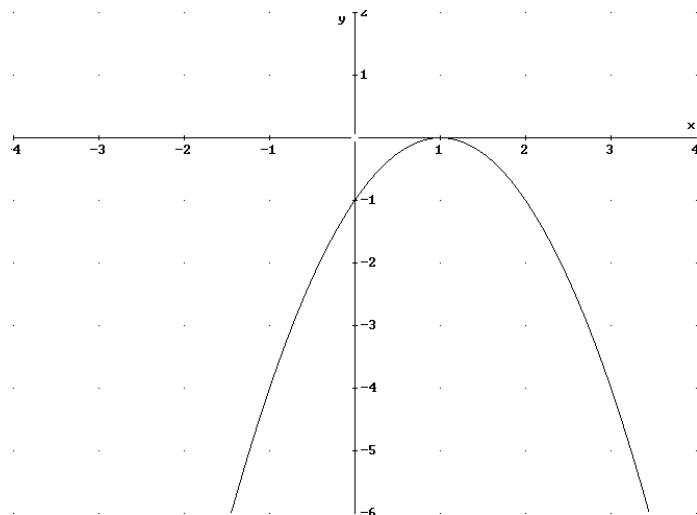
$$\text{- Pasa por } (-4, -5) \Rightarrow -5 = -16 - 4p + q \Rightarrow 4p - q = -11$$

$$\text{- Máximo en } x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 2 + p = 0 \Rightarrow p = -2$$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos que: $-8 - q = -11 \Rightarrow q = 3$

El valor de $f(x)$ en ese punto es: $f(-1) = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3 = 4$

b) Representamos la función para $p = 2$ y $q = -1$.



Calculamos la recta tangente en $x = -2$

$$f(-2) = -(-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 1 = -9$$

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow f'(-2) = -2 \cdot (-2) + 2 = 6$$

$$y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Rightarrow y + 9 = 6(x + 2) \Rightarrow y = 6x + 3$$