PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2016

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

a) Calcule los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{b}{2-x} & si \quad x\le 1 \\ ax^2-3x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$, sea derivable en el punto de abscisa $x=1$

b) Para $a=1$ y $b=2$, estudie su monotonía y determine las ecuaciones de sus asíntotas, si existen.

SOCIALES II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es derivable en $x=1$, tiene que ser continua en ese punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{b}{2-x}\right)=b \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2-3x+1)=a-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow b=a-2$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{b}{(2-x)^2} & si \quad x\le 1 \\ 2ax-3 & si \quad x>1 \end{cases}$

Como la función es derivable en $x=1$, $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=b \\ f'(1^+)=2a-3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow b=2a-3$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} b=a-2 \\ b=2a-3 \end{array}\right\}$, obtenemos que: $a=1$; $b=-1$

b) Calculamos la derivada de la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & si \quad x\le 1 \\ x^2-3x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$ y la igualamos a cero.

$$f'(x)=0=\begin{cases} \dfrac{2}{(2-x)^2} & si \quad x\le 1 \\ 2x-3 & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow 2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

	$(-\infty,1)$	$\left(1,\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
Signo f'	+	—	+
Función	C	D	C

Luego la función es creciente en $(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ y decreciente en $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

Para $x<1$, calculamos las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{2}{2-x}$

Asíntota vertical $x=2$, pero como no está en su dominio, no tiene

Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{2-x}=\dfrac{2}{\infty}=0\Rightarrow y=0$

Para $x>1$, calculamos las asíntotas de la función $f(x)=x^2-3x+1$. No tiene asíntotas ya que es una función polinómica.

La cantidad, *C*, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, *x*, según la función:

$$C(x)=\begin{cases} \dfrac{150+5x}{100} & \text{si } 10\le x\le 50 \\ \dfrac{200+10x}{25+3x} & \text{si } x>50 \end{cases}.$$

Donde *C* y *x* están expresadas en miles de euros.

a) Justifique que *C* es una función continua.

b) ¿A partir de qué liquidez decrece la cantidad dedicada a créditos? ¿Cuál es el valor máximo de *C*?.

c) Calcule la asíntota horizontal e interprétela en el contexto del problema.

SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $\dfrac{150+5x}{100}$ es continua en $\mathbb{R}$. La función racional $\dfrac{200+10x}{25+3x}$ es continua en $\mathbb{R}-\left(-\dfrac{3}{25}\right)$.Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=50$.

Estudiamos la continuidad en $x=50$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 50^-}\dfrac{150+5x}{100}=4 \\ \lim\limits_{x\to 50^+}\dfrac{200+10x}{25+3x}=4 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 50^-}=\lim_{x\to 50^+}=f(50)\Rightarrow \text{ Es continua en } x=50$$

Por lo tanto la función es continua en el intervalo $\left[10,+\infty\right)$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero: $C'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{si } 10\le x\le 50 \\ \dfrac{-350}{(25+3x)^2} & \text{si } x>50 \end{cases}$

Vemos que la derivada no se anula para ningún valor, luego:

	(10,50)	(50,∞)
Signo $C'(x)$	+	—
Función	C	D

Luego, vemos que empieza a decrecer a partir de $x>50$, es decir, a partir de una liquidez mayor de 50.000 €. El valor máximo de $C(x)$ es para $x=50$ y vale 4.000 €

c) Calculamos la asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{200+10x}{25+3x}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{10}{3}\Rightarrow y=\frac{10}{3}$$

Hemos visto que $C(x)$ comienza a decrecer para $x>50$, pero $C(x)$ no llega a tocar el valor $\dfrac{10}{3}$, por lo tanto, el crédito es siempre mayor que $\dfrac{10}{3}$, es decir, superior a 3.333’33 €

En un ensayo clínico de 10 meses de duración, el porcentaje de células de un determinado tejido afectadas por un tipo de enfermedad en el paciente de estudio, viene dado por la función:

$$P(t)=\begin{cases} 8t-t^2 & si\ \ 0\le t\le 6 \\ 2t & si\ \ 6<t\le 10 \end{cases}$$

donde *t* es el tiempo en meses.

a) Represente gráficamente la función $P(t)$.

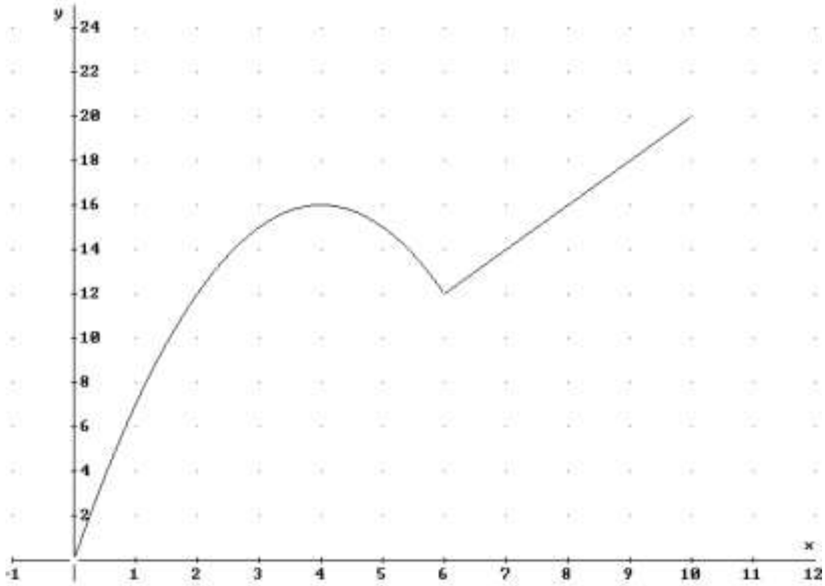
b) ¿En qué mes empieza a decrecer el porcentaje de células afectadas de dicho tejido? ¿Qué porcentaje hay justo en ese momento? ¿En algún otro mes del ensayo se alcanza ese mismo porcentaje?.

c) ¿En qué mes el porcentaje de células afectadas es máximo?. ¿Cuál es el porcentaje en ese momento?

SOCIALES II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función $P(t)$



b) En el 4º mes comienza a decrecer el porcentaje de células afectadas. En ese momento hay un 16%. En el 8º mes se alcanza el mismo porcentaje.

c) Es máximo en el 10º mes. El porcentaje es el 20%.

Sea la función $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad. Calcule la función derivada.

b) Calcule las ecuaciones de sus asíntotas, en caso de que existan.

c) Halle los puntos de la gráfica de *f* donde la recta tangente sea tal que su pendiente valga -1.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{3x+1}{x-1}$ es una función racional, por lo tanto, es continua y derivable en su dominio, es decir: $\mathbb{R}-\{1\}$.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\dfrac{3\cdot(x-1)-1\cdot(3x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-4}{(x-1)^2}$

b) *Verticales*: $x=1$, ya que: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3x+1}{x-1}=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x-1}=+\infty$

Horizontales: $y=3$, ya que: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=3$

Oblicuas: No tiene.

c) Igualamos la derivada a -1

$$\frac{-4}{(x-1)^2}=-1\Rightarrow -4=-x^2+2x-1\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow x=-1\ ;\ x=3$$

Luego, los puntos son: $(-1,1)$ y $(3,5)$

Una fábrica produce entre 1000 y 6000 bombillas al día. El coste diario de producción, en euros, de x bombillas viene dado por la función

$$C(x)=9000+0.08x+\frac{2000000}{x} \qquad con\ 1000\le x\le 6000$$

¿Cuántas bombillas deberían producirse diariamente para minimizar costes? ¿Cuál sería dicho coste?

SOCIALES II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$C'(x)=0'08-\frac{2000000}{x^2}=0\Rightarrow x=5.000$$

	(1000,5000)	(5000,6000)
Signo $C'(x)$	—	+
Función	D	C

$\downarrow$

Mínimo $(5000,9800)$

Luego, se deben fabricar 5.000 bombillas para minimizar costes y, éste sería de 9.800 €

Los beneficios de una empresa, en miles de euros, han evolucionado en los 25 años de su existencia según una función del tiempo, en años, dada por la siguiente expresión:

$$B(t)=\begin{cases} 4t & si \quad 0\le t<10 \\ -\dfrac{1}{5}t^2+8t-20 & si \quad 10\le t\le 25 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de *B* en el intervalo $[0,25]$.

b) Estudie la monotonía de esta función y determine en qué año fueron mayores los beneficios de esta empresa y cuál fue su beneficio máximo.

c) Represente gráficamente esta función.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Las funciones $4t$ y $-\frac{1}{5}t^2+8t-20$ por ser polinómicas, son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Estudiamos primero la continuidad en $t=10$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 10^-} 4t=40 \\ \lim\limits_{t\to 10^+} \left(-\dfrac{1}{5}t^2+8t-20\right)=40 \end{array}\right\} \Rightarrow B(10)=\lim_{t\to 10} B(t)=40 \Rightarrow \text{ Es continua}$$

Estudiamos la derivabilidad en $t=10$

Calculamos la función derivada: $B'(t)=\begin{cases} 4 & si \quad 0\le x<10 \\ -\dfrac{2}{5}t+8 & si \quad 10<x\le 25 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} B'(10^-)=4 \\ B'(10^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow B'(10^-)=B'(10^+)=4 \Rightarrow \text{Derivable en } t=10$$

Luego, la función es continua y derivable en el intervalo $[0,25]$

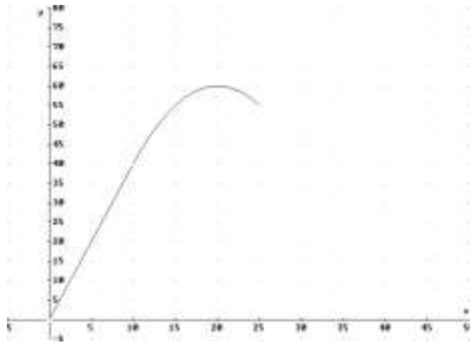
b) El máximo puede estar en los extremos del intervalo $t=10$ y $t=25$, y también en las soluciones de $B'(t)=0$.

$$B(10)=40 \;\; ; \;\; B(25)=55 \;\; ; \;\; B'(t)=-\frac{2t}{5}+8=0 \Rightarrow t=20 \Rightarrow B(20)=60$$

Luego, el máximo beneficio fue de 60.000 € y corresponde a $t=20$

La función es creciente en el intervalo $(0,20)$ y decreciente en el intervalo $(20,25)$

c)



a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x)=(x^2-1)\cdot(3x^3+5x)^3 \qquad g(x)=\frac{\ln 3x}{e^{2x}}$$

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)=\dfrac{3x+6}{2x+1}$ en el punto de abscisa $x=1$.

c) Determine, si existen, las ecuaciones de las asíntotas de la función $h(x)$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=2x\cdot(3x^3+5x)^3+3\cdot(3x^3+5x)^2\cdot(9x^2+5)\cdot(x^2-1)$$

$$g'(x)=\frac{\frac{3}{3x}\cdot e^{2x}-2e^{2x}\ln 3x}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}-2\ln 3x}{e^{2x}}$$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-h(1)=h'(1)\cdot(x-1)$

- $h(1)=\dfrac{9}{3}=3$
- $h'(x)=\dfrac{3(2x+1)-2(3x+6)}{(2x+1)^2}\Rightarrow h'(1)=-1$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-3=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x+4$

c) *Verticales*: $x=-\dfrac{1}{2}$, ya que: $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{3x+6}{2x+1}=-\infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\frac{3x+6}{2x+1}=+\infty$

Horizontales: $y=\dfrac{3}{2}$, ya que: $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x+6}{2x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{3}{2}$

Oblicuas: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

La función de costes de una fábrica, $f(x)$, en miles de euros, viene dada por la expresión:

$$f(x)=2x^2-36x+200$$

donde x es la cantidad fabricada del producto, en miles de kilogramos.

a) Determine la cantidad a fabricar para minimizar el coste y calcule este coste mínimo.

b) A partir del signo de $f'(7)$, ¿qué se puede decir del coste para una producción de siete mil kilogramos?

c) Dibuje la gráfica de la función de costes. ¿Para qué cantidad o cantidades fabricadas el coste es de 200000 €?

SOCIALES II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero:

$$f'(x)=4x-36=0 \Rightarrow x=9$$

	$(-\infty,9)$	$(9,\infty)$
Signo $f'(x)$	—	+
Función $f(x)$	D	C

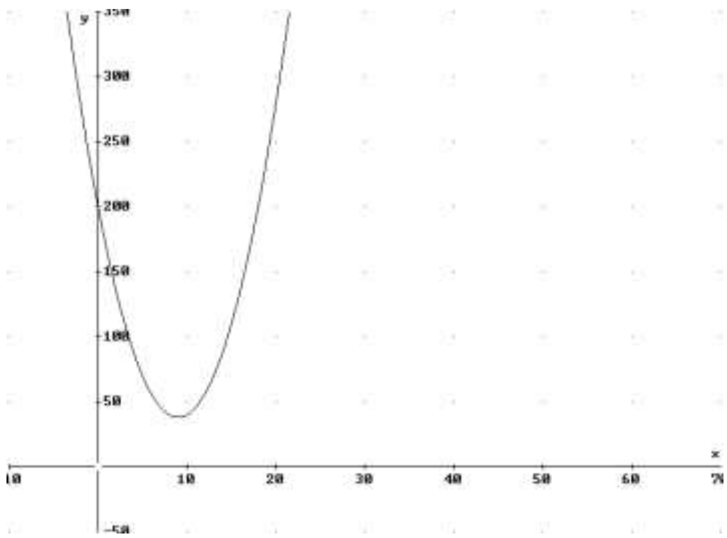
$\downarrow$

Mínimo $(9,38)$

Se deben fabricar 9.000 kg de producto y el coste mínimo es 38.000 €

b) Vemos que $f'(7)<0$, por lo tanto, para 7000 kg el coste de producción decrece.

c)



$$f(x)=2x^2-36x+200=200 \Rightarrow x^2-18x=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=18$$

Luego, para $x=0\ kg$ y $x=18.000\ kg$, el coste de producción es 200.000 €

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{a}x^2+1 & si\ \ x\le 2 \\ -x+a & si\ \ x>2 \end{cases}$**, con** $a>0$**.**

a) Calcule el valor del parámetro a **para que la función sea continua en su dominio. En este caso, ¿sería derivable en su dominio?**

b) Para el valor $a=4$**, represente gráficamente la función y halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa** $x=-1$**.**

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Las funciones $\dfrac{1}{a}x^2+1$ y $-x+a$ al ser polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{a}x^2+1\right)=\dfrac{4}{a}+1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(-x+a)=-2+a \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{4}{a}+1=-2+a \Rightarrow a^2-3a-4=0 \Rightarrow a=4\ ;\ a=-1$$

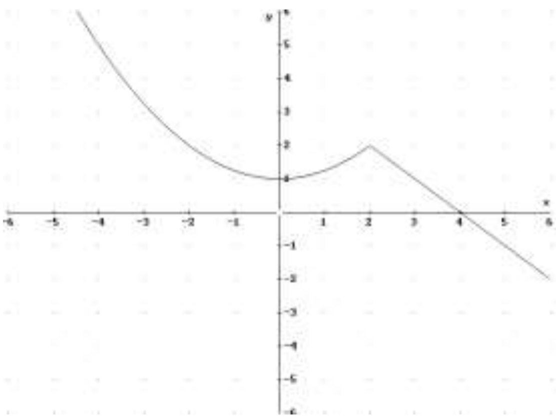
Luego, la función es continua en su dominio si $a=4$, ya que nos dicen que $a>0$.

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=2$ para $a=4$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x & si\quad x<2 \\ -2 & si\quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=1 \\ f'(2^+)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=2$$

b)



La recta tangente en $x=-1$, es: $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$.

- $f(-1)=\dfrac{5}{4}$
- $f'(-1)=-\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo, tenemos: $y-\dfrac{5}{4}=-\dfrac{1}{2}\cdot(x+1)\Rightarrow 2x+4y-3=0$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x} & si \quad x\le 2 \\ x^2-2x+2 & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de esta función.
b) Estudie su monotonía y su curvatura para $x>0$**.**
SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\dfrac{4}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. La función x^2-2x+2 al ser polinómica es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=2$.
Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-}\left(\dfrac{4}{x}\right)=2 \\ \lim_{x\to 2^+}\left(x^2-2x+2\right)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=2 \Rightarrow \text{ Continua en } x=2$$

Vamos a estudiar la derivabilidad en $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -\dfrac{4}{x^2} & si \quad x<2 \\ 2x-2 & si \quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-1 \\ f'(2^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=2$$

Por lo tanto, la función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}=0\Rightarrow No$.

$f'(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1$

	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

La función es decreciente de $(0,2)$ y creciente de $(2,+\infty)$. Tiene un mínimo en $(2,2)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\dfrac{4}{x^3}=0\Rightarrow No$.

$f''(x)=2$

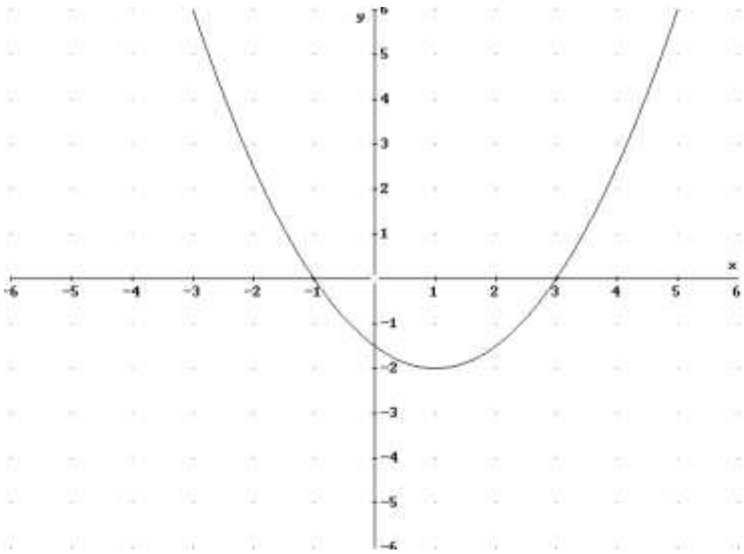
	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Signo $f''(x)$	$+$	$+$
Función	Cx	Cx

La función es convexa en el intervalo $(0,\infty)$.

De una función continua y derivable, *f*, se sabe que la gráfica de la función derivada, *f* ’, es una parábola que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(3,0)$, y que tiene su vértice en el punto $(1,-2)$.
a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f*, así como la existencia de extremos.
b) Si $f(1)=2$, encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=1$
SOCIALES II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(3,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.
Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-1,3)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
Signo f'	+	—	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$
Máximo $x=-1$ mínimo $x=3$

b) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=2$$
$$f'(1)=-2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=-2\cdot(x-1)\Rightarrow y=-2x+4$

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+a & si \quad x<2 \\ \dfrac{1}{x-1} & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Calcule el valor de *a* para que la función sea continua en $x=2$. Para ese valor de *a* obtenido, ¿es derivable la función en $x=2$?

b) Para $a=4$, estudie la monotonía y calcule las ecuaciones de las asíntotas, si existen.

SOCIALES II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el valor de *a* para que sea continua en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-4x+a)=-4+a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow 1=-4+a\Rightarrow a=5$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \quad x<2 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x>2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=0 \\ f'(2^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+)\Rightarrow \text{ No es derivable en } x=2$$

b) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & si \quad x<2 \\ \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x>2 \end{cases}$ y la igualamos a cero.

$$2x-4=0\Rightarrow x=2$$

	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Signo f'	—	—
Función	D	D

Luego la función es decreciente en $\mathbb{R}$

Para $x\geq 2$, calculamos las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

Asíntota vertical $x=1$, pero como no está en su dominio, no tiene

Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{\infty}=0\Rightarrow y=0$

Para $x<2$, calculamos las asíntotas de la función $f(x)=x^2-4x+4$. No tiene asíntotas ya que es una función polinómica.