

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t , medido en meses, transcurridos desde su inauguración:

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2}t^2 + 20t & \text{si } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{90t - 240}{t + 4} & \text{si } t > 6 \end{cases} .$$

- a) ¿Evoluciona la función f de forma continua?
 b) ¿Cuál sería el porcentaje de ocupación al finalizar el segundo año?
 c) ¿En qué momentos el porcentaje de ocupación sería del 40 %?
 d) ¿Llegaría en algún momento a estar completo en caso de que estuviese abierto indefinidamente?

SOCIALES II. 2017 JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $-\frac{5}{2}t^2 + 20t$ es continua en \mathbb{R} . La función racional $\frac{90t - 240}{t + 4}$ es continua en $\mathbb{R} - (-4)$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x = 6$.

Estudiamos la continuidad en $x = 6$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 6^-} -\frac{5}{2}t^2 + 20t = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{90t - 240}{t + 4} = 30 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 6^-} = \lim_{x \rightarrow 6^+} = f(6) \Rightarrow \text{Es continua en } x = 6$$

Por lo tanto, la función es continua en el intervalo $[0, +\infty)$

b) Calculamos: $f(24) = \frac{90 \cdot 24 - 240}{24 + 4} = \frac{1920}{28} = 68'57$

Luego, al finalizar el segundo año, la ocupación sería del 68'57 %

c) Calculamos $f(t) = 40$

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}t^2 + 20t = 40 &\Rightarrow -5t^2 + 40t - 80 = 0 \Rightarrow t = 4 \\ \frac{90t - 240}{t + 4} = 40 &\Rightarrow 90t - 240 = 40t + 160 \Rightarrow t = 8 \end{aligned}$$

Luego, la ocupación hotelera es del 40 % en el mes 4 y en el mes 8

d) Calculamos si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{90t - 240}{t + 4} = \frac{\infty}{\infty} = 90 \Rightarrow y = 90$$

Luego, el porcentaje de ocupación no llegaría al 90 % aunque estuviese abierto indefinidamente.

a) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{e^{5x} - x}{x^2 - x} \quad g(x) = (2x^2 - x)^3 \cdot \ln(x^3 + 2)$$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

SOCIALES II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x) = \frac{(5 \cdot e^{5x} - 1) \cdot (x^2 - x) - (2x - 1) \cdot (e^{5x} - x)}{(x^2 - x)^2}$$

$$g'(x) = 3 \cdot (2x^2 - x)^2 \cdot (4x - 1) \cdot \ln(x^3 + 2) + \frac{3x^2}{x^3 + 2} \cdot (2x^2 - x)^3$$

b) La recta tangente en $x = 1$ es $y - h(1) = h'(1) \cdot (x - 1)$

$$- h(1) = \frac{1}{1} =$$

$$- h'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow h'(1) = -1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$

En una especie animal la contracción del iris, en décimas de milímetro, después de exponer el ojo a una luz brillante durante un determinado tiempo, viene dada por

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{4}{t-1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

donde t es el tiempo, en segundos, que transcurre desde que se concentra la luz en el ojo.

- a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f .
 b) Represente gráficamente la función f , determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas, en caso de que existan.
 c) Determine en qué instante se obtiene la máxima contracción y su valor.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función t^2 es continua y derivable para $0 \leq t \leq 2$; la función $\frac{4}{t-1}$ es, también, continua y derivable para $t > 2$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $t = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} t^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{t-1} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \Rightarrow \text{Continua en } t = 2$$

Calculamos la función derivada: $f'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ \frac{-4}{(t-1)^2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$ y como:

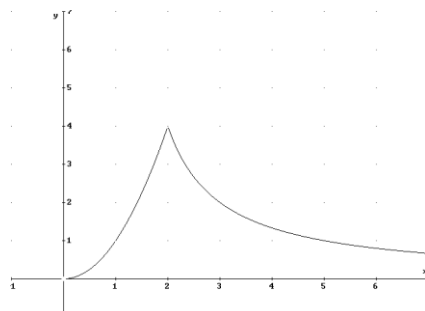
$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } t = 2$$

Luego la función $f(t)$ es continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $[0, +\infty) - \{2\}$.

b) Igualamos la primera derivada a cero: $2t = 0 \Rightarrow t = 0$; $\frac{-4}{(t-1)^2} = 0 \Rightarrow \text{No}$

	$[0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(t)$	+	-
Función	C	D

Asíntota vertical y oblicua no tiene. Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{t-1} = \frac{4}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0$



c) La máxima contracción se obtiene para $t = 2$ y vale 4

$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-4} & \text{si } x \leq 0 \\ x+3 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función en su dominio y clasifique sus discontinuidades, en caso de que exista alguna.

b) Estudie la derivabilidad de la función en su dominio.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{1}{x-4}$ es continua y derivable para $x \leq 0$; la función $x+3$ es, también, continua y derivable para $0 < x < 2$; la función x^2+1 es, también, continua y derivable para $x \geq 2$; . Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=0$ y $x=2$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x+3 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \text{Discontinua inevitable de salto finito}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x+3 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2+1 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \text{Continua en } x=2$$

b) En $x=0$ no es derivable ya que no es continua. Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

$$\text{Calculamos la función derivada: } f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-4)^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ y como:}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 1 \\ f'(2^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+) \Rightarrow \text{No es derivable en } x=2$$

Luego la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0 \text{ y } 2\}$.

Sea la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$.

a) Estudie su monotonía y determine sus extremos relativos.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -2$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$

Tiene un Máximo en $(-2, 17)$ y un mínimo en $(2, -15)$

b) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = -10$$

$$f'(1) = -9$$

Sustituyendo, tenemos: $y + 10 = -9 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -9x - 1$

a) Calcule los valores de los parámetros a y b para que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ presente un extremo relativo en el punto $(2, 6)$.

b) Para $a = 1$ y $b = 1$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 1$.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f(x) = x^3 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax$

$$\text{- Extremo en } (2, 6) \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 6 \Rightarrow 8 + 4a + b = 6 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4a = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema sale que: $a = -3$; $b = 10$

b) La función es: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$. La ecuación de la recta tangente es: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = 3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x \Rightarrow f'(1) = 5$$

Sustituyendo, tenemos: $y - 3 = 5 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 5x - 2$

El beneficio en euros que obtiene una empresa al vender x unidades de un artículo viene dado por la función $B(x) = -x^2 + 360x - 18000$ $50 \leq x \leq 350$.

a) ¿Cuál es el beneficio obtenido si vende 100 unidades? ¿Cuántas unidades debe vender para obtener un beneficio de 13500 €?

b) ¿Cuál es el número de unidades que debe vender para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende ese beneficio?

c) Represente gráficamente la función y determine cuántas unidades hay que vender para no obtener pérdidas.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si $x = 100 \Rightarrow B(x) = -100^2 + 360 \cdot 100 - 18000 = 8000$ €

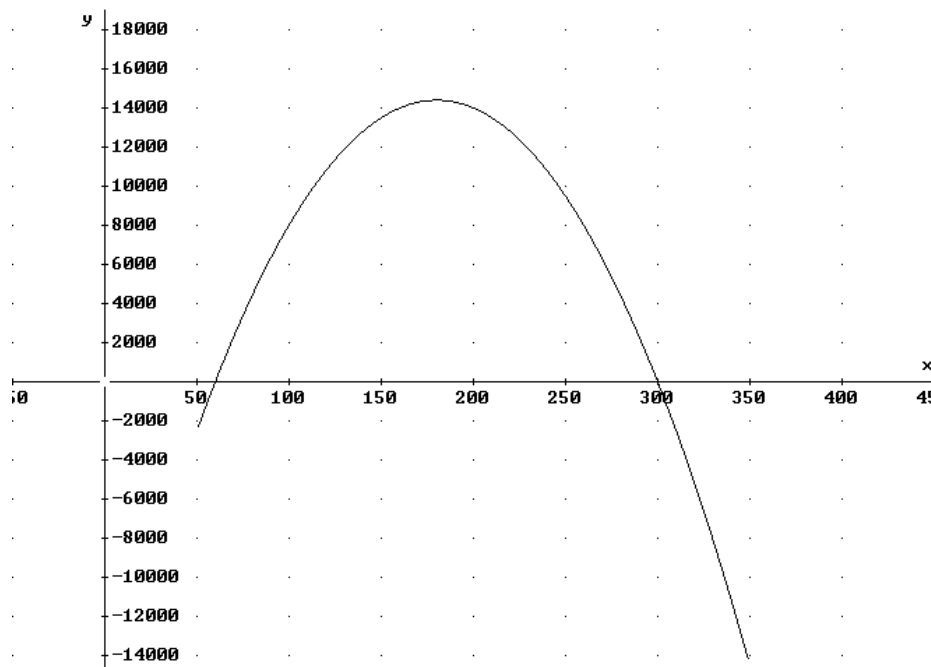
$$13500 = -x^2 + 360x - 18000 \Rightarrow x^2 - 360x + 31500 = 0 \Rightarrow x = 210 \quad x = 150$$

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$B'(x) = -2x + 360 = 0 \Rightarrow x = 180$$

$$x = 180 \Rightarrow B(x) = -180^2 + 360 \cdot 180 - 18000 = 14400$$
 €

c)



$$B(x) = -x^2 + 360x - 18000 = 0 \Rightarrow x = 60 ; x = 300$$

Debe vender más de 60 unidades y menos de 300 unidades

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - bx - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de a y b , para que la función sea derivable en $x = 0$.

b) Para $a = 1$ y $b = 2$, halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

SOCIALES II. 2017 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en $x = 0$.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{x-1} = -a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - bx - 1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 0$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -\frac{a}{(x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x - b & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = -b \end{array} \right\} \Rightarrow b = 1$$

Luego, tenemos que: $a = 1$ y $b = 1$

b) La función es: $f(x) = x^2 - 2x - 1$. La ecuación de la recta tangente es: $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$f(2) = -1$$

$$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(2) = 2$$

Sustituyendo, tenemos: $y + 1 = 2 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 2x - 5$

Una empresa quiere invertir en productos financieros un mínimo de un millón de euros y un máximo de seis millones de euros. La rentabilidad que obtiene viene dada en función de la cantidad invertida, x , por la siguiente expresión:

$$R(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 10x - 16 & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

donde tanto x , como $R(x)$, están expresadas en millones de euros.

- a) Estudie la continuidad de la función $R(x)$.
 b) Esboce la gráfica de la función.
 c) ¿Qué cantidad debe invertir para obtener la máxima rentabilidad y a cuánto asciende ésta?
 ¿Para qué valores de x la rentabilidad es positiva?

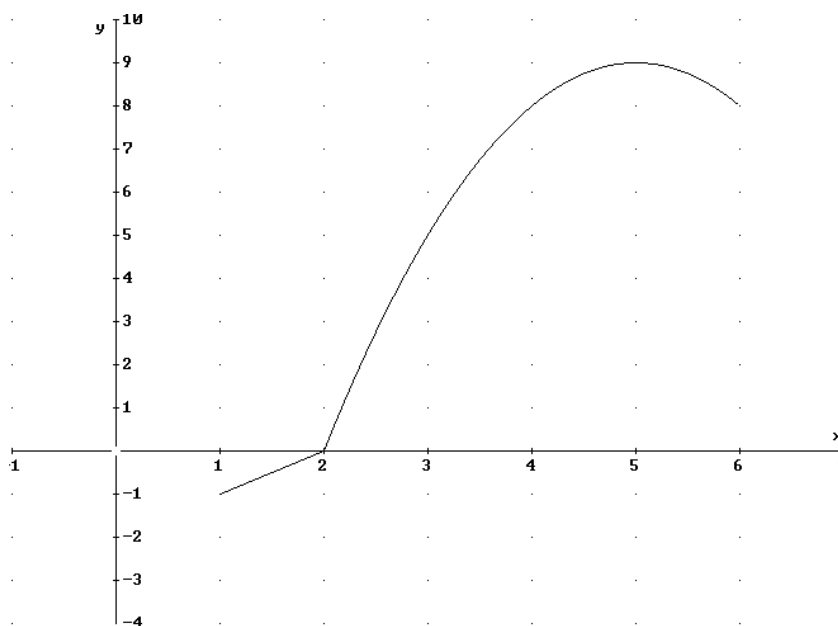
SOCIALES II. 2017 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

- a) Estudiamos primero la continuidad en $x = 2$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} -x^2 + 10x - 16 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow R(2) = \lim_{x \rightarrow 2} R(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua}$$

- b) Hacemos el dibujo de la función



- c) Debe invertir 5 millones de euros y la rentabilidad sería de 9 millones de euros. La rentabilidad es positiva para los valores de x mayores de 2.

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} ax - 3x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Calcule los valores de a y b para que la función f sea derivable en $x = 1$.

b) Para $a = 3$ y $b = -2$, estudie la monotonía y curvatura de la función f .

SOCIALES II. 2017 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x = 1$, entonces es continua en $x = 1$. Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax - 3x^2 = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x^2 + b = 2 + b \end{array} \right\} \Rightarrow a - 3 = 2 + b \Rightarrow a - b = 5$$

Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$. Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} a - 6x & \text{si } x < 1 \\ 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = a - 6 \\ f'(1^+) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a - 6 = 4 \Rightarrow a = 10$$

Luego, tenemos que: $a = 10$ y $b = 5$

b) La función es: $f(x) = \begin{cases} 3x - 3x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = \begin{cases} 3 - 6x & \text{si } x < 1 \\ 4x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$3 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad ; \quad 4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
Función	C	D	C

La función es creciente en $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$. Decreciente en $(\frac{1}{2}, 1)$ y tiene un máximo en $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

No hay ningún valor que anule la segunda derivada

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo $f''(x)$	-	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $(-\infty, 1)$. Convexa $(1, +\infty)$ y tiene un punto de inflexión en $(1, 0)$

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

a) Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

b) Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

SOCIALES II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera y segunda derivada

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \quad ; \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad ; \quad f''(x) = 6x + 2a$$

- Mínimo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 0 \Rightarrow -2a + b = -3$

- Punto de inflexión en $x = -2 \Rightarrow f''(-2) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (-2) + 2a = 0 \Rightarrow 2a = 12$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a = 6$; $b = 9$

b) Corte con el eje X $\Rightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = -3 \Rightarrow (0,0)$; $(-3,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$

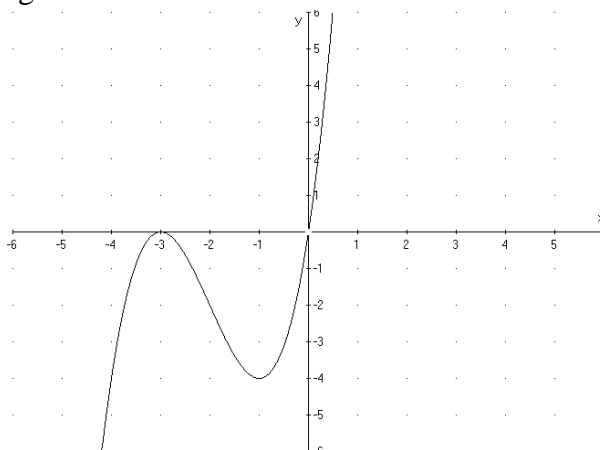
Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad ; \quad x = -3$$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
Signo y'	+	-	+
Función	C	D	C

\downarrow \downarrow
 Máximo $(-3,0)$ mínimo $(-1,-4)$

Hacemos la representación gráfica.



Se consideran las siguientes funciones: $f(x) = \frac{5x-16}{x}$ y $g(x) = x^2$

a) Determine la abscisa del punto donde se verifique $f'(x) = g'(x)$.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

SOCIALES II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las derivadas de las dos funciones y las igualamos

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \frac{5x-5x+16}{x^2} = \frac{16}{x^2} \\ g'(x) = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{16}{x^2} = 2x \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

b) Calculamos las rectas tangentes

La recta tangente a $f(x) = \frac{5x-16}{x}$ en $x=2$ es $y - f(2) = f'(2) \cdot (x-2)$

$$f(2) = \frac{10-16}{2} = -3$$

$$f'(x) = \frac{16}{x^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{16}{4} = 4$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 3 = 4 \cdot (x-2) \Rightarrow y = 4x - 11$

La recta tangente a $g(x) = x^2$ en $x=2$ es $y - g(2) = g'(2) \cdot (x-2)$

$$g(2) = 2^2 = 4$$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow g'(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 4 = 4 \cdot (x-2) \Rightarrow y = 4x - 4$

Vemos que las dos rectas son paralelas ya que tienen la misma pendiente, luego, no se cortan.