PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Parte II, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Parte II, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Parte II, Opción B

En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9.
¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97% y un error máximo admisible igual a 3?.
SOCIALES II. 2006 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

El error *E*, viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso, sabemos que $\sigma = 9$; $E = 3$; y como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego sustituyendo, tenemos que: $E = 3 = 2'17 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 42'38 \simeq 43$

Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime mediante un intervalo de confianza al 95% el valor de la probabilidad de obtener un cinco.
SOCIALES II. 2006 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\ ,\ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{80}{400} = 0'2$$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'2 - 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'2\cdot 0'8}{400}}\ , 0'2 + 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'2\cdot 0'8}{400}}\right) = (0'1608; 0'2392)$$

De 500 encuestados en una población, 350 se mostraron favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones. Calcule un intervalo de confianza, al 99'5 %, para la proporción de personas favorables a estas retransmisiones.
SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$\mu = p = \frac{350}{500} = 0'7 \quad ; \quad \frac{1+0'995}{2} = 0'9975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'81$$

$$I.C. = \left(p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = \left(0'7 \pm 2'81 \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3}{500}} \right) = (0'7 \pm 0'0575) = (0'6425 \ ; \ 0'7575)$$

El gasto anual, en videojuegos, de los jóvenes de una ciudad sigue una ley Normal de media desconocida μ y desviación típica 18 euros. Elegida, al azar, una muestra de 144 jóvenes se ha obtenido un gasto medio de 120 euros.
a) Indique la distribución de las medias de las muestras de tamaño 144.
b) Determine un intervalo de confianza, al 99 %, para el gasto medio en videojuegos de los jóvenes de esa ciudad.
c) ¿Qué tamaño muestral mínimo deberíamos tomar para, con la misma confianza, obtener un error menor que 1'9?
SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $N\left(120;\frac{18}{\sqrt{144}}\right)=N(120;1'5)$

b) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu=120;\sigma=18;n=144$ y como el nivel de confianza es del 99%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'99}{2}=0'995\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'575$$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\mu+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(120-2'575\cdot1'5\ ;\ 120+2'575\cdot1'5)=(116'1375\ ;123'8625)$$

c) Como el nivel de confianza es del 99%, calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'99}{2}=0'995\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E=1'9=2'575\cdot\frac{18}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=595'1\simeq596$$

a) Sea la población {1, 5, 7}. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.
b) De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?
SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

(1, 1) (1, 5) (1, 7)
(5, 1) (5, 5) (5, 7)
(7, 1) (7, 5) (7, 7)

Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
1	1	1	1
3	2	6	18
4	2	8	32
5	1	5	25
6	2	12	72
7	1	7	49
	9	39	197

Media = $\mu = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{39}{9} = 4'33$

Varianza $= \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \frac{197}{9} - (4'33)^2 = 3'13$

b)

$$\left.\begin{array}{l} 500 \to 300\,\text{h} \\ 30 \to \quad x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 18 \text{ hombres}$$

$$\left.\begin{array}{l} 500 \to 200\,m \\ 30 \to \quad x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 12 \text{ mujeres}$$

Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

51, 50, 53, 48, 49, 50, 51, 48, 50, 51, 50, 47, 51, 51, 49, 51.

La talla de los bebés sigue una ley Normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.

a) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

b) Determine un intervalo de confianza, al 97 %, para la media poblacional.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(50,\dfrac{2}{\sqrt{16}}\right)=N(50,0'5)$

b) Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2}=0'985\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C.=(50\pm 2'17\cdot 0'5)=(50\pm 1'085)=(48'915;51'085)$$

Un fabricante produce tabletas de chocolate cuyo peso en gramos sigue una ley Normal de media 125 g y desviación típica 4 g.
a) Si las tabletas se empaquetan en lotes de 25, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de las tabletas de un lote se encuentre entre 124 y 126 gramos?
b) Si los lotes fuesen de 64 tabletas, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de las tabletas del lote superase los 124 gramos?
SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $N\left(125, \frac{4}{\sqrt{25}}\right) = N(125, 0'8)$

$$p(124 < x < 126) = p\left(\frac{124-125}{0'8} < z < \frac{126-125}{0'8}\right) = p(-1'25 < z < 1'25) =$$

$$= 2 \cdot p(z < 1'25) - 1 = 2 \cdot 0'8944 - 1 = 0'7888$$

b) $N\left(125, \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(125, 0'5)$

$$p(x > 124) = p\left(z > \frac{124-125}{0'5}\right) = p(z > -2) = p(z < 2) = 0'9772$$

Una variable aleatoria sigue una ley Normal con media desconocida y desviación típica 2'4. Se quiere estimar la media poblacional, con un nivel de confianza del 93 %, para lo que se toman dos muestras de distintos tamaños.
a) Si una de las muestras tiene tamaño 16 y su media es 10'3, ¿cuál es el intervalo de confianza correspondiente?
b) Si con la otra muestra el intervalo de confianza es (9'776, 11'224), ¿cuál es la media muestral? ¿Cuál es el tamaño de la muestra?
SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Como el nivel de confianza es del 93%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'93}{2}=0'965\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1'81$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C.=(10'3\pm 1'81\cdot\frac{2'4}{4})=(10'3\pm 1'086)=(9'214;11'386)$$

b) $\mu=\dfrac{9'776+11'224}{2}=10'5$

$$E=0'724=1'81\cdot\frac{2'4}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=36$$

De una población Normal, con media desconocida y varianza 36, se extrae una muestra aleatoria que resulta tener una media muestral de 173.
a) Obtenga un intervalo de confianza del 97 % para la media poblacional, si el tamaño de la muestra es 64.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra, si se desea que el error cometido al estimar la media poblacional sea inferior a 1'2, para un nivel de confianza del 95 %?
SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(173, \frac{6}{\sqrt{64}}\right) = N(173, 0'75)$

Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (173 \pm 2'17 \cdot \frac{6}{8}) = (173 \pm 1'6275) = (171'3725; 174'6275)$$

b) $\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

$$E = 1'2 = 1'96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 96$$

Las calificaciones obtenidas por los estudiantes de Matemáticas siguen una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1’19. Para una muestra de esa población se obtiene que (6’801, 6’899) es un intervalo de confianza, al 92 %, para la media poblacional.
a) Determine la media muestral.
b) Determine el tamaño de la muestra.
SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $\mu = \dfrac{6'801 + 6'899}{2} = 6'85$

b) $\dfrac{1+0'92}{2} = 0'96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'75$

$$E = 0'049 = 1'75 \cdot \frac{1'19}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 1807$$

a) Los valores:

52, 61, 58, 49, 53, 60, 68, 50, 53

constituyen una muestra aleatoria de una variable aleatoria Normal, con desviación típica 6. Obtenga un intervalo de confianza para la media de la población, con un nivel de confianza del 92 %.

b) Se desea estimar la media poblacional de otra variable aleatoria Normal, con varianza 49, mediante la media de una muestra aleatoria. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de la estimación, mediante un intervalo de confianza al 97 %, sea menor o igual que 2.

SOCIALES II. 2006 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(56, \dfrac{6}{\sqrt{9}}\right) = N(56, 2)$

Como el nivel de confianza es del 92%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'92}{2} = 0'96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'75$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (56 \pm 1'75 \cdot 2) = (56 \pm 3'5) = (52'5; 59'5)$$

b) $\dfrac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$

$$E = 2 = 2'17 \cdot \frac{7}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'17 \cdot 7}{2}\right)^2 = 57'68 \simeq 58$$

En una muestra aleatoria de 1000 personas de una ciudad, 400 votan a un determinado partido político.
Calcule un intervalo de confianza al 96 % para la proporción de votantes de ese partido en la ciudad.
SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\mu = p = \frac{400}{1000} = 0'4 \quad ; \quad \frac{1+0'96}{2} = 0'98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$$

$$I.C. = \left(p \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) = \left(0'4 \pm 2'055\sqrt{\frac{0'4 \cdot 0'6}{1000}} \right) = (0'4 \pm 0'0318) = (0'3682 \ ; \ 0'4318)$$