PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2016

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Se desea estimar la media de una variable aleatoria Normal cuya desviación típica es 2’5. Para ello, se toma una muestra aleatoria, obteniéndose los siguientes resultados:

18 18’5 14 16’5 19 20 20’5 17 18’5 18.

a) Determine un intervalo de confianza al 96% para la media poblacional.

b) ¿Cuál es el error máximo cometido con esta estimación?.

c) Con el mismo nivel de confianza, si queremos que el error máximo sea inferior a 1, ¿qué tamaño muestral mínimo debemos tomar?.

SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media:

$$\mu = \frac{18+18'5+14+16'5+19+20+20'5+17+18'5+18}{10} = \frac{180}{10} = 18$$

Como el nivel de confianza es del 96%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'96}{2} = 0'98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'06$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (18 \pm 2'06 \cdot \frac{2'5}{\sqrt{10}}) = (16'3715 \ ; \ 19'6285)$$

b) El error que hemos cometido es:

$$E = 2'06 \cdot \frac{2'5}{\sqrt{10}} = 1'6285$$

c) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 1 = 2'06 \cdot \frac{2'5}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'06 \cdot 2'5}{1} \right)^2 = 26'52 \simeq 27$$

El peso de los habitantes de una determinada ciudad sigue un ley Normal de media 65 kg y desviación típica 8 kg.
a) ¿Qué distribución sigue la media de los pesos de las muestras de habitantes de tamaño 64 extraídas de esa ciudad?.
b) Si se extrae una muestra aleatoria de tamaño 100 de esa ciudad, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de esa muestra está comprendido entre 64 y 65 kg?.
SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $N\left(65, \dfrac{8}{\sqrt{64}}\right) = N(65,1)$

b) La distribución es: $N\left(65, \dfrac{8}{\sqrt{100}}\right) = N(65, 0'8)$

Calculamos la probabilidad:

$$p(64 < x < 65) = p\left(\frac{64-65}{0'8} < z < \frac{65-65}{0'8}\right) = p(-1'25 < z < 0) = p(z < 0) - p(z < -1'25) =$$
$$= p(z < 0) - \left[1 - p(z < 1'25)\right] = 0'5 - 1 + 0'8944 = 0'3944$$

El número de pulsaciones por minuto (p/m) de los pacientes de un centro de salud de una cierta población sigue una ley Normal de desviación típica 9.
a) Se elige una muestra aleatoria de 100 pacientes que da como número medio de (p/m) 68. Con un nivel del 97%, determine un intervalo de confianza para el número medio de las p/m de los pacientes de ese centro.
b) Con el mismo nivel de confianza, ¿cuántos pacientes, como mínimo, se necesitan en la muestra para estimar el número medio de p/m con un error no superior a 1?.
SOCIALES II. 2016 RESERVA 1. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(68, \frac{9}{\sqrt{100}}\right) = N(68, 0'9)$

Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (68 \pm 2'17 \cdot 0'9) = (66'047 \; ; \; 69'953)$$

b) Calculamos el tamaño mínimo de la muestra

$$E = 1 = 2'17 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'17 \cdot 9}{1}\right)^2 = 381'42 \simeq 382$$

a) La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal con desviación típica 8 cm y media desconocida. A partir de una muestra aleatoria se ha obtenido un intervalo de confianza al 95% para estimar la talla media poblacional, que ha resultado ser $(164.86\ ,\ 171.14)$ en cm.

Calcule la talla media de la muestra y el tamaño muestral mínimo necesario para reducir a la mitad el error máximo de estimación anterior.

b) En un club privado con 243 usuarios se ha seleccionado una muestra para hacer un sondeo, según la actividad realizada y por muestreo aleatorio estratificado. En esa muestra, 5 usuarios practican Yoga, 7 Pilates y 15 Mantenimiento, ¿cuántos usuarios están inscritos en cada actividad en ese club?

SOCIALES II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) $\mu = \dfrac{164'86 + 171'14}{2} = 168$

Luego, el error cometido será: $E = 171'14 - 168 = 3'14$

Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = \frac{3'14}{2} = 1'96 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 8 \cdot 2}{3'14}\right)^2 = 99'74 \simeq 100$$

b)

$$\left.\begin{array}{rcr} 27 & \rightarrow & 5\ Yoga \\ 243 & \rightarrow & x \end{array}\right\} x = 45\ Yoga$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 27 & \rightarrow & 7\ Pilates \\ 243 & \rightarrow & x \end{array}\right\} x = 63\ Pilates$$

$$\left.\begin{array}{rcr} 27 & \rightarrow & 15\ Mantenimiento \\ 243 & \rightarrow & x \end{array}\right\} x = 135\ Mantenimiento$$

El peso de los paquetes de azúcar de una marca, medido en gramos, sigue una distribución Normal con desviación típica de 16 gramos. A partir de una muestra de 100 paquetes de azúcar de dicha marca, se obtuvo un peso medio de 247 gramos.
a) Obtenga un intervalo de confianza para el peso medio de los paquetes de azúcar de esa marca, con un nivel de confianza del 97%.
b) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el peso medio con un error máximo de 0.5 gramos, a un nivel de confianza del 95%.
SOCIALES II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(247, \frac{16}{\sqrt{100}}\right) = N(247, 1'6)$

Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (247 \pm 2'17 \cdot 1'6) = (247 \pm 3'472) = (243'528\ ;\ 250'472)$$

b) Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'5 = 1'96 \cdot \frac{16}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 3.933'79 \simeq 3.934$$

Para estudiar el número de personas que van al cine mensualmente en una ciudad, se ha seleccionado una muestra aleatoria de 10 meses y se ha registrado el número de entradas al cine vendidas en cada mes. Los datos son los siguientes:

682 553 555 666 657 649 522 568 700 552

a) Suponiendo que el número de entradas vendidas mensualmente sigue una distribución Normal con desviación típica 50 entradas, calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 95%, para el número medio de personas que van al cine mensualmente en esa ciudad.

b) ¿Cuál es el error máximo que se comete al estimar esta media con este intervalo?

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será:

$$\mu = \frac{682+553+555+666+657+649+522+568+700+552}{10} = \frac{6104}{10} = 610'4$$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(610'4 \pm 1'96 \frac{50}{\sqrt{10}}\right) = (610'4 \pm 30'99) = (579'41\ ;\ 641'39)$$

b) El error que hemos cometido es:

$$E = 1'96 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} = 30'99$$

Una cadena de hipermercados decide estudiar la proporción de artículos de un determinado tipo que tienen defectos en su envoltorio. Para ello, selecciona aleatoriamente 2000 artículos de este tipo entre sus hipermercados y encuentra que 19 de ellos tienen defectos en su envoltorio.
a) Determine un intervalo, al 95% de confianza, para la proporción real de artículos con este tipo de defecto e interprete el resultado obtenido.
b) ¿Cuántos artículos, como mínimo, deberá seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, la proporción muestral difiera de la proporción real a lo sumo en un 1%?.
SOCIALES II. 2016 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \, , \, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{19}{2000} = 0'0095$$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'0095 - 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'0095 \cdot 0'9905}{2000}} , 0'0095 + 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'0095 \cdot 0'9905}{2000}} \right) = (0'00525; 0'01375)$$

Para interpretar el resultado, multiplicamos los límites del intervalo por los 2000 artículos

$$0'00525 \cdot 2000 = 10'5 \simeq 11$$
$$0'01375 \cdot 2000 = 27'5 \simeq 28$$

Luego, con un nivel de confianza del 95%, de los 2000 artículos puede haber entre 11 y 28 artículos con el envoltorio defectuoso.

b) $\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$

$$E = 0'01 = 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'0095 \cdot 0'9905}{n}} \Rightarrow n = 623'92 \simeq 624 \text{ artículos}$$

a) Se desea tomar una muestra aleatoria estratificada de las personas mayores de edad de un municipio, cuyos estratos son los siguientes intervalos de edades, en años: de 18 a 30, de 31 a 45, de 46 a 60 y mayores de 60. En el primer intervalo hay 7500 personas, en el segundo hay 8400, en el tercero 5700 y en el cuarto 3000. Calcule el tamaño de la muestra total y su composición, sabiendo que el muestreo se hace con afijación proporcional y se han elegido al azar 375 personas del primer estrato.
b) Dada la población $\{2,4,6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2, que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas las muestras.
SOCIALES II. 2016 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos haciendo proporciones y tenemos que:

Edades	18 a 30	31 a 45	46 a 60	Más de 60	TOTAL
Nº de personas	7.500	8.400	5.700	3.000	24.600
Nº personas muestra	375	420	285	150	1.230

b) (2, 2) (2, 4) (2, 6)
(4, 2) (4, 4) (4, 6)
(6, 2) (6, 4) (6, 6)

Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
	9	36	156

Media = $\mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{36}{9} = 4$

Desviación típica $= \sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{156}{9} - 4^2} = 1'15$

Varianza $= \sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{156}{9} - 4^2 = \dfrac{4}{3} = 1'33$