

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\operatorname{cos} x & 0 \\ \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A ? Calcula dicha matriz inversa.
MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Para que la matriz A tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$|A| = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1 \neq 0$$

Luego, la matriz A tiene inversa para cualquier valor de x .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\operatorname{cos} x & -1 \\ \operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{cos} x & 0 \\ -\operatorname{cos} x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Siendo I la matriz identidad 3×3 y 0 la matriz nula 3×3 , prueba que $A^3 + I = 0$
 b) Calcula A^{10}

MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{10} = A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A = (-I) \cdot (-I) \cdot (-I) \cdot A = -A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

De las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Determina cuáles tienen inversa y en los casos en que exista, calcula el determinante de dichas inversas.

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La matriz B no tiene inversa porque no es cuadrada. La matriz C no tiene inversa porque su determinante vale cero.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$|D^{-1}| = \frac{1}{|D|} = \frac{1}{1} = 1$$

Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & b \end{pmatrix}$ verifica que $\det(A) = 1$ y sus columnas son vectores

perpendiculares dos a dos.

a) Calcula los valores de a y b .

b) Comprueba que para dichos valores se verifica que $A^{-1} = A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left. \begin{array}{l} |A| = -2ab = 1 \\ (a, 0, b) \cdot (-a, 0, b) = -a^2 + b^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ó} \quad a = -\frac{\sqrt{2}}{2}; b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Calculamos

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -b & 0 & b \\ 0 & 2ab & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}^t}{-2ab} = \frac{\begin{pmatrix} -b & 0 & -a \\ 0 & 2ab & 0 \\ b & 0 & -a \end{pmatrix}}{-2ab} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2b} \\ 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2a} & 0 & \frac{1}{2b} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ -a & 0 & b \end{pmatrix}$$

Efectivamente, para los valores de a y de b obtenidos en el primer apartado se cumple que:

$$A^{-1} = A^t$$

Determina la matriz X tal que $A \cdot X - 3 \cdot B = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Sabemos que:

$$A \cdot X = 3 \cdot B \Rightarrow X = 3 \cdot A^{-1} \cdot B$$

Calculamos la matriz inversa de A .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = 3 \cdot A^{-1} \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 12 & -39 \\ 9 & -21 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula el determinante de las matrices: $2 \cdot A$; A^{31} y $(A^{31})^{-1}$.

b) Halla la matriz A^{-1} .

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot (-1) = -8$$

$$|A^{31}| = (-1)^{31} = -1$$

$$|(A^{31})^{-1}| = -1$$

b) Calculamos la matriz inversa de A .

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$

- a) Determina para qué valores del parámetro λ la matriz A no tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para $\lambda = \pm 1$.

- b) Calculamos la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

$$(A)^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Determina a, b y c sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix}$, verifica:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \text{rango}(A) = 2.$$

MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 7 = 9 \\ 2b + 3c = 5 \end{cases}$$

$$\text{rango}(A) = 2 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & b & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a - 3ac + 7b - c = 2$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, obtenemos que: $a = 1$; $b = \frac{23}{29}$; $c = \frac{33}{29}$