PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2002

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B

Determina una matriz *A* simétrica (*A* coincide con su traspuesta) sabiendo que:

$$\det(A) = -7 \quad y \quad A\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como A es una matriz simétrica tiene que ser cuadrada de orden 2 y de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-b & 6a-3b \\ 2b-c & 6b-3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} ac-b^2=-7 \\ 2a-b=-4 \\ 2b-c=1 \end{array}\right\}$, obtenemos que $a=-1; b=2; c=3$

Luego la matriz pedida es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina la matriz X que verifica la ecuación $A\cdot X = X - B$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-1 & b & c-1 \\ d & e-1 & f-1 \\ g & h+1 & i+1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema que se obtiene al igualar las dos matrices, tenemos: $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

Considera las matrices: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ **;** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{x} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz inversa de *A*.
b) Calcula A^{127} y A^{128}.
c) Determina *x* e *y* tal que $A \cdot B = B \cdot A$.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que: $A^{-1}=\dfrac{(A^d)^t}{|A|}=\dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}=\dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A$$

Por inducción vemos que:

$$A^{127}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=A$$

$$A^{128}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$

Luego, vemos que: $x = 0$, $y = 1$

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Halla los valores de *a* para los que la matriz 3 *A* tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para *a* = 0.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que la matriz 3 *A* tenga inversa, su determinante tiene que ser distinto de cero y como $|3 \cdot A| = 3^3 \cdot |A|$, entonces el determinante de *A* tiene que ser distinto de cero.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ No existe ningún valor. Por lo tanto, la matriz 3 *A* tiene inversa para todos los valores de *a*.

b) Para *a* = 0, la matriz *A* es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(A^2\right)^{-1} = \frac{((A^2)^d)^t}{|A^2|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$ y enuncia las propiedades que hayas usado.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\begin{vmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & x & 1 \\ 2k & y & 2 \\ 3k & z & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k & x & ax \\ 2k & y & ay \\ 3k & z & az \end{vmatrix} = 0$$

Hemos aplicado la propiedad que dice: "*Si todos los elementos de una línea de un determinante están formados por la suma de dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes que tienen los mismos elementos que el determinante dado, excepto los correspondientes a aquella línea que en el primer determinante está formada por los primeros sumandos y en el segundo por los segundos*". Los dos determinantes resultantes valen cero, ya que en el primero la 1ª columna y la 3ª son proporcionales, y en el segundo determinante la 2ª y la 3ª columnas también son proporcionales, luego valen 0.

Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera:

$$A=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}\ ;\ C=\begin{pmatrix}0 & 4 & -3\\-2 & 9 & -6\\1 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

a) Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

b) Determina una matriz X que verifique la relación: $\frac{1}{2}X+(AB)^t=C$

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 8 & 6\\-1 & -4 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow (A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 8 & -4\\3 & 6 & -3\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(6)\Rightarrow (B\cdot A)^t=(6)$$

b) $$\frac{1}{2}X+(AB)^t=C\Rightarrow\frac{1}{2}X=C-(AB)^t\Rightarrow X=2\cdot\left(C-(AB)^t\right)$$

$$X=2\cdot\left[\begin{pmatrix}0 & 4 & -3\\-2 & 9 & -6\\1 & -4 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 8 & -4\\3 & 6 & -3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -4\\-12 & 2 & -4\\-4 & -20 & 14\end{pmatrix}$$