

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sean C_1 , C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada A de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de A^3 .

b) El determinante de A^{-1} .

c) El determinante de $2A$.

d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente, $3C_1 - C_3$; $2C_3$ y C_2 .

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso

será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$

c) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40$

d)

$$\begin{aligned} |3C_1 - C_3 \quad 2C_3 \quad C_2| &= |3C_1 \quad 2C_3 \quad C_2| - |C_3 \quad 2C_3 \quad C_2| = 6 \cdot |C_1 \quad C_3 \quad C_2| - 2 \cdot |C_3 \quad C_3 \quad C_2| = \\ &= -6 \cdot |C_1 \quad C_2 \quad C_3| - 2 \cdot 0 = -6 \cdot 5 = -30 \end{aligned}$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: ”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo” y “Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0”.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ halla la matriz X que cumple

que $A \cdot X = (B \cdot A^t)^t$.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si vamos operando y aplicando las propiedades de las matrices, tenemos:

$$A \cdot X = (B \cdot A^t)^t \Rightarrow A \cdot X = (A^t)^t \cdot B^t \Rightarrow A \cdot X = A \cdot B^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot B^t \Rightarrow X = B^t$$

Luego la matriz X será: $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tendrá inversa para aquellos valores de m que no anulen el determinante de A . Vamos a calcular el determinante de A e igualarlo a cero.

$$|A| = 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1.$$

Luego admite inversa para todos los valores de $m \neq \pm 1$.

b) Vamos a calcular la matriz inversa de A para $m = 2$.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale -2 . ¿Cuánto vale el determinante de la matriz $4A$?

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa?

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|4A| = (4)^3 \cdot |A| = (64) \cdot (-2) = -128$

b) Vamos a calcular primero la matriz $3B + B^2$

$$\begin{aligned} 3 \cdot B + B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & -2 \\ \lambda & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda+4 & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación calculamos el determinante de dicha matriz y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} 2\lambda+4 & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8\lambda^2 + 34\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ ó } \frac{1}{4}$$

Luego no tiene inversa para $\lambda = 4$ y $\frac{1}{4}$

Considera la matriz $M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde x es un número real.

a) ¿Para qué valores de x existe $(M(x))^{-1}$? Para los valores de x obtenidos, calcula la matriz $(M(x))^{-1}$.

b) Resuelve, si es posible, la ecuación $M(3) \cdot M(x) = M(5)$

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de $M(x)$.

$$|M(x)| = 2^x = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución. Luego tiene inversa para todos los valores de } x.$$

Calculamos la matriz inversa de A para $\lambda = -2$.

$$(M(x))^{-1} = \frac{(M(x)^d)^t}{|M(x)|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & -x \cdot 2^x & 2^x \end{pmatrix}^t}{2^x} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & -x \cdot 2^x \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}}{2^x} = \begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2^{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2$$

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $A \cdot X + 2B = 3C$?

b) Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que la ecuación matricial tenga solución, la matriz A debe de tener matriz inversa, luego su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow \text{tiene inversa y tiene solución la ecuación matricial.}$$

$$b) A \cdot X + 2B = 3C \Rightarrow A \cdot X = 3C - 2B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}(3C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1}(3C - 2B)$$

Vamos a calcular la matriz inversa de A para $m = 1$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $X = A^{-1}(3C - 2B)$, vamos sustituyendo y operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$