

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES**

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Sean  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  las columnas primera, segunda y tercera, respectivamente, de una matriz cuadrada  $A$  de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) El determinante de  $A^3$ .

b) El determinante de  $A^{-1}$ .

c) El determinante de  $2A$ .

d) El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son, respectivamente,  $3C_1 - C_3$ ;  $2C_3$  y  $C_2$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Sabemos que  $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

b) Sabemos que:  $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ ; luego en nuestro caso

será:  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{5}$

c) Si  $A_n$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , sabemos que se cumple que  $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$ ; en nuestro caso como  $A$  es una matriz de orden 3, tenemos que:  $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40$

d)

$$\begin{aligned} |3C_1 - C_3 \quad 2C_3 \quad C_2| &= |3C_1 \quad 2C_3 \quad C_2| - |C_3 \quad 2C_3 \quad C_2| = 6 \cdot |C_1 \quad C_3 \quad C_2| - 2 \cdot |C_3 \quad C_3 \quad C_2| = \\ &= -6 \cdot |C_1 \quad C_2 \quad C_3| - 2 \cdot 0 = -6 \cdot 5 = -30 \end{aligned}$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: ”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo” y “Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0”.

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$  halla la matriz  $X$  que cumple

que  $A \cdot X = (B \cdot A^t)^t$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Si vamos operando y aplicando las propiedades de las matrices, tenemos:

$$A \cdot X = (B \cdot A^t)^t \Rightarrow A \cdot X = (A^t)^t \cdot B^t \Rightarrow A \cdot X = A \cdot B^t \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A \cdot B^t \Rightarrow X = B^t$$

Luego la matriz  $X$  será:  $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) Determina los valores de  $m$  para los que la matriz  $A$  tiene inversa.  
b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de  $A$  para  $m = 2$ .

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) La matriz  $A$  tendrá inversa para aquellos valores de  $m$  que no anulen el determinante de  $A$ . Vamos a calcular el determinante de  $A$  e igualarlo a cero.

$$|A| = 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 1.$$

Luego admite inversa para todos los valores de  $m \neq \pm 1$ .

b) Vamos a calcular la matriz inversa de  $A$  para  $m = 2$ .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}^t}{-3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}}{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada  $A$  de orden 3 vale  $-2$ . ¿Cuánto vale el determinante de la matriz  $4A$  ?.

b) Dada la matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , ¿para qué valores de  $\lambda$  la matriz  $3B + B^2$  no tiene inversa?.

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Si  $A_n$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , sabemos que se cumple que  $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$ ; en nuestro caso como  $A$  es una matriz de orden 3, tenemos que:  $|4A| = (4)^3 \cdot |A| = (64) \cdot (-2) = -128$

b) Vamos a calcular primero la matriz  $3B + B^2$

$$\begin{aligned} 3 \cdot B + B^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 3\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2 & 2 \\ \lambda & 2\lambda+1 & -2 \\ \lambda & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda+4 & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A continuación calculamos el determinante de dicha matriz y lo igualamos a cero

$$\begin{vmatrix} 2\lambda+4 & 8 & 2 \\ 4\lambda & 2\lambda+1 & 1 \\ \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8\lambda^2 + 34\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 4 \text{ ó } \frac{1}{4}$$

Luego no tiene inversa para  $\lambda = 4$  y  $\frac{1}{4}$

Considera la matriz  $M(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , donde  $x$  es un número real.

a) ¿Para qué valores de  $x$  existe  $(M(x))^{-1}$ ? Para los valores de  $x$  obtenidos, calcula la matriz  $(M(x))^{-1}$ .

b) Resuelve, si es posible, la ecuación  $M(3) \cdot M(x) = M(5)$

**MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de  $M(x)$ .

$$|M(x)| = 2^x = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución. Luego tiene inversa para todos los valores de } x.$$

Calculamos la matriz inversa de  $A$  para  $\lambda = -2$ .

$$(M(x))^{-1} = \frac{(M(x)^d)^t}{|M(x)|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & -x \cdot 2^x & 2^x \end{pmatrix}^t}{2^x} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^x & -x \cdot 2^x \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}}{2^x} = \begin{pmatrix} 2^{-x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2^{x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 2$$

Considera las matrices:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de  $m$  tiene solución la ecuación matricial  $A \cdot X + 2B = 3C$ ?

b) Resuelve la ecuación matricial dada para  $m = 1$ .

**MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Para que la ecuación matricial tenga solución, la matriz  $A$  debe de tener matriz inversa, luego su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m \Rightarrow m \neq 0 \Rightarrow \text{tiene inversa y tiene solución la ecuación matricial.}$$

$$b) A \cdot X + 2B = 3C \Rightarrow A \cdot X = 3C - 2B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}(3C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1}(3C - 2B)$$

Vamos a calcular la matriz inversa de  $A$  para  $m = 1$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como  $X = A^{-1}(3C - 2B)$ , vamos sustituyendo y operando:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$