

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B$; $A \cdot C$; $A^t \cdot B^t$ y $C^t \cdot A^t$, siendo A^t ; B^t y C^t las matrices transpuestas de A , B y C , respectivamente.

b) Razona cuáles de las matrices A , B , C y $A \cdot B$ tienen inversa y en los casos en que la respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

MATEMÁTICAS II. 2004. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Solamente la matriz $A \cdot B$ tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{((A \cdot B)^d)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Denotamos por M^t a la matriz transpuesta de una matriz M .

a) Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y que $\det(A) = 4$; calcula los siguientes determinantes:

$$\det(-3A^t) \text{ y } \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}$$

b) Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I$. Calcula $\det(B)$.

c) Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser $\det(C) = 3$? Razona la respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 2, tenemos que: $|-3A^t| = (-3)^2 \cdot |A^t| = 9 \cdot 4 = 36$, ya que también se cumple que: $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6 \cdot 4 = 24$$

b) $|B^3| = |I| \Rightarrow |B| \cdot |B| \cdot |B| = |I| \Rightarrow |B|^3 = 1 \Rightarrow |B| = \sqrt[3]{1} = 1$

c) Sabemos que: $C \cdot C^{-1} = I \Rightarrow |C| \cdot |C^{-1}| = |I| = 1$

Si $|C| = 3 \Rightarrow |C^{-1}| = \frac{1}{3} \Rightarrow |C^t| = \frac{1}{3}$, lo cual es falso, ya que: $|C| = |C^t|$

Se sabe que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$: Calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes

determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$a) \begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 15 \cdot (-2) = -30$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”.

$$b) \begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) = 6$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo”.

$$c) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{31} & a_{22} - a_{32} & a_{23} - a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0”.

Sabiendo que: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$, calcula, indicando las propiedades que utilices, los siguientes

determinantes: a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2004. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -3 \cdot (-6) = 18$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} y & x & z \\ u & t & v \\ b & a & c \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) = -12$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante se cambian entre si dos filas o columnas, el determinante cambia de signo”.

$$\text{c) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-6) = 6$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante puede descomponerse en suma de dos determinantes colocando en dicha fila o columna el primer y segundo sumando, respectivamente. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el determinante vale 0”.