

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$, siendo a un número real.

a) Calcula el valor de a para que $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

b) Calcula, en función de a , los determinantes de $2A$ y A^t , siendo A^t la transpuesta de A .

c) ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A sea simétrica?. Razona la respuesta.

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$a) \quad \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - a & -1 \\ 0 & a^2 + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - a = 12 \\ a^2 + a = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 4$$

$$b) \quad |2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2 \\ 0 & -2a \end{vmatrix} = -4a^2$$

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2$$

c) Si A es una matriz simétrica $\Rightarrow A = A^t$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \text{No es posible.}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

a) Calcula los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$.

b) Calcula $A^2 - 7A + 10I$.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A - \lambda I$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 2; \lambda = 5$$

b)

$$A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $B = (2 \ 1)$; $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la matriz inversa de $A \cdot B + C$.

b) Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: $C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos primero la matriz $A \cdot B + C$

$$A \cdot B + C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 1) + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B + C)^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}^t}{\begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}}{-6} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{10}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -x-2y \\ 6x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x-2y=0 \\ 6x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-2x \end{cases}$$

Resuelve $A \cdot B' \cdot X = -2C$, siendo B' la matriz traspuesta de B y.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Tenemos que resolver la ecuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, tenemos:

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a - 6c = -2 \\ -5a - 2c = 0 \\ -b - 6d = -8 \\ -5b - 2d = 2 \end{cases}$$

Resolviendo, tenemos que la matriz X es: $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -1 \\ \frac{5}{14} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$