

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1-\lambda \\ 1+\lambda & -1+\lambda^2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de B .

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2-2\lambda-1 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 ; \lambda = 3$$

Luego tiene inversa para todos los valores de $\lambda \neq -1$ y 3

c) Calculamos la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{(B^d)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^t}{4} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de α para los que la matriz A tiene inversa.

b) Para $\alpha = 1$, calcula A^{-1} y resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 3.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $\alpha \neq \frac{2}{3}$.

b) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula el valor de m para el que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ verifica la relación $2A^2 - A = I$ y determina A^{-1} para dicho valor de m .

b) Si M es una matriz cuadrada que verifica la relación $2M^2 - M = I$, determina la expresión de M^{-1} en función de M y de I .

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$2A^2 - A = I \Rightarrow 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2m+1=0 \\ 2m^2-m=1 \end{array} \right\} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t}{-\frac{1}{2}} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$2M^2 - M = I \Rightarrow 2M^2 \cdot M^{-1} - M \cdot M^{-1} = I \cdot M^{-1} \Rightarrow M^{-1} = 2M - I$$

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3.

a) Calcula los valores de λ para los que el determinante de $A - 2I$ es cero.

b) Calcula la matriz inversa de $A - 2I$ para $\lambda = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda - 2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 ; \lambda = 1 ; \lambda = -1$$

b) Calculamos la matriz inversa de $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A - 2I)^{-1} = \frac{((A - 2I)^d)^t}{|A - 2I|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 15 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \\ -8 & 15 & -4 \end{pmatrix}^t}{12} = \frac{\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}}{12} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Sean I la matriz identidad de orden 2 y $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentra los valores de m para los cuales se cumple que $(A - I)^2 = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.

b) Para $m = 2$, halla la matriz X tal que $AX - 2A^t = O$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 0$$

b) Calculamos el determinante de B .

$$AX - 2A^t = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a+2c=2 \\ a+c=4 \\ b+2d=2 \\ b+d=2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$