

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2$

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

La matriz A tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$\begin{aligned} A \cdot X = A^2 - B &\Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^2 - A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A - A^{-1} \cdot B = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es -3 , calcula, indicando las

propiedades que utilices, los siguientes determinantes:

a) $\det(-2A)$ y $\det(A^{-1})$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|-2A| = (-2)^3 \cdot |A| = (-8) \cdot (-3) = 24$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en

nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

b) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 7a_{11} & 7a_{12} & 7a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -7 \cdot 2 \cdot (-3) = 42$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} + 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} + 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 5a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & 5a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 5a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{31} & 5a_{31} \\ a_{12} & 2a_{32} & 5a_{32} \\ a_{13} & 2a_{33} & 5a_{33} \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{31} \\ a_{12} & a_{32} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + 2 \cdot 5 \cdot 0 = 5 \cdot (-3) = -15$$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero”.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^{-1} .

b) Hallar la matriz X que verifica $A^t \cdot X + B = I$, siendo I la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A .

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La matriz A tiene inversa ya que es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 6 & -4 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos la matriz que nos piden:

$$\begin{aligned} A^t \cdot X + B = I &\Rightarrow A^t \cdot X = I - B \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot I - (A^t)^{-1} \cdot B \Rightarrow \\ &\Rightarrow X = (A^t)^{-1} \cdot I - (A^t)^{-1} \cdot B = (A^t)^{-1} - (A^t)^{-1} \cdot B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = (A^t)^{-1} - (A^t)^{-1} \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -3 & 14 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m se verifica que $A^2 = 2A + I$?

b) Para $m = 1$, calcula A^{-1} y la matriz X que satisface $A \cdot X - B = A \cdot B$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+m)^2 + 1 & (1+m) + (1-m) \\ (1+m) + (1-m) & 1 + (1-m)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2 + 2m + 2 & 2 \\ 2 & m^2 - 2m + 2 \end{pmatrix}$$

$$2A + I = \begin{pmatrix} 2+2m & 2 \\ 2 & 2-2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix}$$

$$A^2 = 2A + I \Rightarrow \begin{pmatrix} m^2 + 2m + 2 & 2 \\ 2 & m^2 - 2m + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2m & 2 \\ 2 & 3-2m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 2 = 3 + 2m \\ m^2 - 2m + 2 = 3 - 2m \end{cases} \Rightarrow m = \pm 1$$

b) Calculamos la matriz inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X que nos piden:

$$A \cdot X - B = A \cdot B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X - A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot A \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B + B$$

$$X = A^{-1} \cdot B + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Halla la matriz X que verifica: $A^{-1} \cdot X \cdot A = B - A$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la matriz inversa de A

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz que nos piden:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot X \cdot A = B - A &\Rightarrow A \cdot A^{-1} \cdot X \cdot A = A \cdot B - A \cdot A \Rightarrow X \cdot A = A \cdot B - A \cdot A \Rightarrow \\ &\Rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} - A \cdot A \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1} - A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = A \cdot B \cdot A^{-1} - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ -1 & 16 & -6 \\ -2 & 40 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & 18 & -7 \\ -2 & 45 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Se sabe que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ es 3, calcula los siguientes

determinantes, indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(A^3)$, $\det(A^{-1})$ y $\det(A + A^t)$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Por otro lado, sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en

nuestro caso será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{3}$

La matriz que nos dan es simétrica, por lo tanto, $A = A^t \Rightarrow |A + A^t| = |2A|$

Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|2A| = (2)^3 \cdot |A| = 8 \cdot 3 = 24$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ 2b & 2d & 2e \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & e & f \\ b & d & e \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = -2 \cdot (3) = -6$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

c) $\begin{vmatrix} a & b & 4a-c \\ b & d & 4b-e \\ c & e & 4c-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 4a \\ b & d & 4b \\ c & e & 4c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & a \\ b & d & b \\ c & e & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 = -3$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. En el segundo paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero”.

Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es 2, calcula los siguientes

determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilices:

a) $\det(3A)$. b) $\det(A^{-1})$. c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si A_n es una matriz cuadrada de orden n , sabemos que se cumple que $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$; en nuestro caso como A es una matriz de orden 3, tenemos que: $|3A| = (3)^3 \cdot |A| = (27) \cdot (2) = 54$

b) Sabemos que: $A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$; luego en nuestro caso

será: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & 2y & z \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-2) = -12$

En el primer paso y en el segundo hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante está multiplicada por un mismo número, dicho número podemos sacarlo fuera del determinante multiplicándolo”. En el tercer paso hemos aplicado la propiedad que dice: “Si en un determinante cambiamos entre si dos filas o dos columnas el determinante cambia de signo”.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

En el primer paso hemos aplicado la propiedad de los determinantes que dice: “Si una fila o columna de un determinante es suma de dos sumandos, dicho determinante se puede descomponer en suma de dos determinantes”. Y también la propiedad: “Si un determinante tiene dos filas o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero”.