

MATEMÁTICAS II

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ y } D = (4 \quad -5 \quad 6)$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica que: $A^2X - BA + X = CD$
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Despejamos la matriz X

$$A^2X - BA + X = CD \Rightarrow A^2X + X = CD + BA \Rightarrow (A^2 + I)X = CD + BA \Rightarrow X = (A^2 + I)^{-1}(CD + BA)$$

Calculamos $A^2 + I$

$$A^2 + I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I$$

$$\text{Calculamos } (A^2 + I)^{-1} = (2 \cdot I)^{-1} = 2^{-1} \cdot I^{-1} = \frac{1}{2} \cdot I$$

Luego:

$$\begin{aligned} X &= (A^2 + I)^{-1}(CD + BA) = \frac{1}{2} \cdot I \cdot (CD + BA) = \frac{1}{2} \cdot (CD + BA) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \quad -5 \quad 6) + \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 4 & -5 & 6 \\ -8 & 10 & -12 \\ 12 & -15 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ -9 & 9 & -12 \\ 13 & -13 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Determina, si existen, los valores de a , b y c para que las matrices A y B conmutan.

b) Calcula A^2 , A^3 , A^{2017} y A^{2018} .

c) Calcula, si existe, la matriz inversa de A

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si conmutan, se tiene que cumplir que $A \cdot B = B \cdot A$, luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = b = 0; c = -1$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$

$$A^{2017} = A^{2016} \cdot A = (A^2)^{1008} \cdot A = (I)^{1008} \cdot A = A$$

$$A^{2018} = (A^2)^{1009} = (I)^{1009} = I$$

c) Calculamos la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t}{1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A \cdot A = I \Rightarrow A = A^{-1}$