PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

Resuelve $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{array}{r} 2x+5z = 7 \\ x+y-2z=-2 \\ -x+y+z=-1 \end{array}\right\}$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de cero, podemos resolverlo por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{16} = 1 \,;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-16}{16} = -1 \,;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{16} = 1$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} \lambda x+y-z=1 \\ x+\lambda y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=\lambda^{2} \end{array}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuélvelo para $\lambda=2$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \lambda^3-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0,-1 \text{ y } 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda=0$	2	3	S. Incompatible
$\lambda=-1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda\neq 0,-1,1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Lo resolvemos para $\lambda=2$. El sistema es $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+y+2z=4 \end{array}\right\}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\,;\; y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-3}{6}=-\frac{1}{2}\,;\; z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Sea $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$

a) Determina los valores de $m \in \mathbb{R}$ **para los que la matriz** ***A*** **tiene inversa.**

b) Para ***m*** **= 0 y siendo** $\boldsymbol{X=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}}$**, resuelve** $\boldsymbol{X\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$**.**

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = m^2+m-6=0 \Rightarrow m=2\ ;\ m=-3$$

Luego, la matriz tiene inversa para todos los valores de $m \neq 2\ y\ -3$

b)

$$X\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=3 \\ x-3y+2z=1 \\ -x+3y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x-y+z &= 2 \\ x+\lambda y+z &= 8 \\ \lambda x+y+\lambda z &= 10 \end{aligned}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$|A| = 0$ para cualquier valor de λ, ya que tiene dos columnas iguales, por lo tanto rango(A) < 3 siempre.

Con la matriz ampliada del sistema formamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda & 8 \\ \lambda & 1 & 10 \end{vmatrix} = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \ ; \ \lambda = 2$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = -1$	1	2	S. Incompatible
$\lambda = 2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq -1, 2$	2	3	S. Incompatible

b) Lo resolvemos para $\lambda = 2$. El sistema es $\left.\begin{aligned} x-y+z &= 2 \\ x+2y+z &= 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-y &= 2-z \\ x+2y &= 8-z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-z \\ y = 2 \\ z = z \end{cases}$

Considera las matrices: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}$ **;** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **;** $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Halla el valor de $m \in \mathbb{R}$ para el que la matriz A no tiene inversa.

b) Resuelve $A \cdot X = O$ para m = 3.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{vmatrix} = 2m-6=0 \Rightarrow m=3$$

Luego, la matriz A no tiene inversa para m = 3.

b) El sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$$

Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} x+y-z &= -4 \\ 3x+\lambda y+z &= \lambda-1 \\ 2x+\lambda y &= -2 \end{aligned}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = -2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) Lo resolvemos para $\lambda = 1$. El sistema es $\left.\begin{aligned} x+y-z &= -4 \\ 3x+y+z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+y &= -4+z \\ 3x+y &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-z \\ y = -6+2z \\ z = z \end{cases}$

Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} \lambda x - y - z &= -1 \\ x + \lambda y + z &= \ \ 4 \\ x + y + z &= \lambda + 2 \end{aligned}\right\}$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -1$$

A continuación, calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	2	3	S. Incompatible
$\lambda = -1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\lambda \neq 1 \ y \ -1$	3	3	S. Compatible Determinado

b) $\lambda = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Luego lo resolvemos por Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1 \, ; \, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{3} = 0 \, ; \, z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9}{3} = 3$$