

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{array} \right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ .

b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0 = 0 \Rightarrow \text{Para cualquier valor de } \lambda \text{ el rango de A es menor}$$

que 3.

Calculamos un determinante de orden 3 con la matriz ampliada.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Hacemos la discusión del sistema

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda \neq 0$	2	3	Sistema incompatible

c) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$

$$\left. \begin{array}{l} y - z = -1 \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -1 + z \\ x + y = 0 \end{array} \right\} \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -1 + z \\ z = z \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + 2y + 2z = 0 \\ \lambda x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda^2 - \lambda^2 - 4\lambda = \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0; \lambda = 2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(A)	
$\lambda = 0$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda = 2$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda \neq 0$ y 2	3	S. Compatible determinado

b) Para $\lambda = 0$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left. \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para $\lambda = 2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left. \begin{cases} 2y + 2z = -2x \\ 2y + z = -2x \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego vemos que no hay ningún valor de λ para el cual $z \neq 0$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + \alpha z & = 2 \\ 2x + \alpha y & = \alpha + 4 \\ 3x + y + (\alpha + 4)z & = 7 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores de α

b) Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha + 4 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 ; \alpha = 3$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha \neq 0$ y 3	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo para $\alpha = 2 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2z = 2 \\ 2x + 2y = 6 \\ 3x + y + 6z = 7 \end{array} \right\}$ Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \alpha x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x + 2y + (3 + \alpha)z = 4 + \alpha \end{cases}$$

- a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.
 b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 + \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 ; \alpha = -4$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = -2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = -4$	2	3	S. Incompatible
$\alpha \neq -2$ y -4	3	3	S. Compatible determinado

Luego para $\alpha \neq -2$ y -4 el sistema es compatible determinado y tiene solución única

b) Para $\alpha = -2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + 3z = 4 \\ x + y - 2z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2x + y = 4 - 3z \\ x + y = -2 + 2z \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{-6 + 5z}{3} ; y = \frac{z}{3} ; z = z$$

Considera el sistema dado por $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
 b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
 c) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones.
 Halla todas las soluciones en dichos casos.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0 \Rightarrow \alpha = 3; \alpha = 5$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 5$	2	3	S. Incompatible
$\alpha \neq 3$ y 5	3	3	S. Compatible determinado

a) Luego para $\alpha \neq 3$ y 5 el sistema es compatible determinado y tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \alpha - 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-2\alpha^2 + \alpha + 15}{\alpha^2 - 8\alpha + 15}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 8\alpha + 15};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-4\alpha^2 + 17\alpha - 15}{\alpha^2 - 8\alpha + 15}$$

b) Para $\alpha = 5$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

c) Para $\alpha = 3$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{-1 + 5z}{3}; y = 1 - 2z; z = z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} 2x + y + (\alpha - 1)z &= \alpha - 1 \\ x - \alpha y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 2\alpha - 2 \end{aligned} \right\}$$

a) Resuelve el sistema para $\alpha = 1$.

b) Determina, si existe, el valor de α para el que $(x, y, z) = (1, -3, \alpha)$ es la única solución del sistema dado.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema que tenemos que resolver es:
$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - y - 3z &= 1 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned} \right\} .$$
 Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}; y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}; z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

b) Sustituimos la solución que nos dan en el sistema dado y vemos si tiene sentido.

$$\left. \begin{aligned} 2 - 3 + (\alpha - 1)\alpha &= \alpha - 1 \\ 1 + 3\alpha - 3\alpha &= 1 \\ 1 - 3 + 2\alpha &= 2\alpha - 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha &= 0 \\ 1 &= 1 \\ -2 &= -2 \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos la ecuación: $\alpha^2 - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ y $\alpha = 2$.

Hacemos la discusión del sistema para estos valores:

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\alpha = 2$	3	3	Sistema compatible determinado

Luego, para $\alpha = 2$ la solución del sistema es única y es: $(1, -3, \alpha)$.