PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2015

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} \lambda x + y - z = -1 \\ \lambda x + \lambda z = \lambda \\ x + y - \lambda z = 0 \end{array}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ.
b) Resuelve el sistema para $\lambda = 0$.
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = 0 = 0 \Rightarrow$$ Para cualquier valor de λ el rango de A es menor que 3.

Calculamos un determinante de orden 3 con la matriz ampliada.

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Hacemos la discusión del sistema

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda \neq 0$	2	3	Sistema incompatible

c) Resolvemos el sistema para $\lambda = 0$

$$\left.\begin{array}{r} y - z = -1 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = -1 + z \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = -1 + z \\ z = z \end{array}\right.$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \lambda x+\lambda y+\lambda z=0 \\ \lambda x+2y+2z=0 \\ \lambda x+2y+z=0 \end{cases}$

a) Discute el sistema según los valores de λ
b) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene alguna solución en la que $z \neq 0$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2 & 2 \\ \lambda & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\lambda+2\lambda^2+2\lambda^2-2\lambda^2-\lambda^2-4\lambda=\lambda^2-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0\ ;\ \lambda=2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y hacemos la discusión del sistema.

	R(*A*)	
$\lambda=0$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda=2$	2	S. Compatible indeterminado
$\lambda\neq 0\ y\ 2$	3	S. Compatible determinado

b) Para $\lambda=0$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2y+2z=0 \\ 2y+\ \ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Para $\lambda=2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{l} 2y+2z=-2x \\ 2y+\ \ z=-2x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=0 \end{cases}$$

Luego vemos que no hay ningún valor de λ para el cual $z\neq 0$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{lr} x+\alpha z & = \;\; 2 \\ 2x+\alpha y & = \alpha+4 \\ 3x+y+(\alpha+4)z & = \;\; 7 \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de α
b) Resuelve el sistema para $\alpha = 2$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 2 & \alpha & 0 \\ 3 & 1 & \alpha+4 \end{vmatrix} = -2\alpha^2 + 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \; ; \; \alpha = 3$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha \neq 0 \;\; y \; 3$	3	3	S. Compatible determinado

b) Vamos a resolverlo para $\alpha = 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2z=2 \\ 2x+2y=6 \\ 3x+y+6z=7 \end{array}\right\}$ Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{8}{4} = 2 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{4}{4} = 1 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{aligned} \alpha x + y + 3z &= 4 \\ x + y - 2z &= -2 \\ -x + 2y + (3+\alpha)z &= 4+\alpha \end{aligned}\right.$

a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene solución única.
b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema dado tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3+\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \ ; \ \alpha = -4$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\alpha = -2$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = -4$	2	3	S. Incompatible
$\alpha \neq -2 \ y \ -4$	3	3	S. Compatible determinado

Luego para $\alpha \neq -2 \ y \ -4$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única
b) Para $\alpha = -2$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Lo resolvemos:

$$\left.\begin{aligned} -2x + y + 3z &= 4 \\ x + y - 2z &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2x + y &= 4 - 3z \\ x + y &= -2 + 2z \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{-6+5z}{3} \ ; \ y = \frac{z}{3} \ ; \ z = z$$

Considera el sistema dado por $A \cdot X = B$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
b) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
c) Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0 \Rightarrow \alpha = 3 \ ; \ \alpha = 5$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\alpha = 3$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$\alpha = 5$	2	3	S. Incompatible
$\alpha \neq 3 \ y \ 5$	3	3	S. Compatible determinado

a) Luego para $\alpha \neq 3 \ y \ 5$ el sistema es compatible determinado y tiene solución única. Lo resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \alpha - 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-2\alpha^2 + \alpha + 15}{\alpha^2 - 8\alpha + 15} \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & \alpha - 2 & 2 \\ 3 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha^2 - 8\alpha + 15} \ ;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix}} = \frac{-4\alpha^2 + 17\alpha - 15}{\alpha^2 - 8\alpha + 15}$$

b) Para $\alpha = 5$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

c) Para $\alpha = 3$ el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{-1 + 5z}{3} \ ; \ y = 1 - 2z \ ; \ z = z$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{aligned} 2x+y+(\alpha-1)z &= \alpha-1 \\ x-\alpha y-3z &= 1 \\ x+y+2z &= 2\alpha-2 \end{aligned}\right\}$

a) Resuelve el sistema para $\alpha=1$.
b) Determina, si existe, el valor de α para el que $(x,y,z)=(1,-3,\alpha)$ es la única solución del sistema dado.
MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El sistema que tenemos que resolver es: $\left.\begin{aligned} 2x+y &= 0 \\ x-y-3z &= 1 \\ x+y+2z &= 0 \end{aligned}\right\}$. Lo resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{4}{-3}=-\frac{4}{3};\ z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

b) Sustituimos la solución que nos dan en el sistema dado y vemos si tiene sentido.

$$\left.\begin{aligned} 2-3+(\alpha-1)\alpha &= \alpha-1 \\ 1+3\alpha-3\alpha &= 1 \\ 1-3+2\alpha &= 2\alpha-2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha^2-2\alpha &= 0 \\ 1 &= 1 \\ -2 &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos la ecuación: $\alpha^2-2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0\ y\ \alpha=2$.

Hacemos la discusión del sistema para estos valores:

	R(A)	R(M)	
$\alpha=0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\alpha=2$	3	3	Sistema compatible determinado

Luego, para $\alpha=2$ la solución del sistema es única y es: $(1,-3,\alpha)$.