

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 3, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A

$$\left. \begin{array}{l} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{array} \right\}$$

Se considera el sistema de ecuaciones lineales

a) Discútelos según los valores del parámetro α .

b) Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x = 4$.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz ampliada y lo igualamos a cero

$$|M| = \begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

$$\text{Si } \alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 1$$

$$\text{Si } \alpha = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 1$$

	R(A)	R(M)	
$\alpha = 1$	1	1	S. Compatible indeterminado
$\alpha \neq 1$	2	3	S. Incompatible

b) Resolvemos el sistema para $\alpha = 1$:

$$x + y = 2 \Rightarrow x = x; y = 2 - x$$

Calculamos la solución para $x = 4$: $x = 4$; $y = -2$

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\begin{cases} x + \lambda y + z = \lambda \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

- a) Determina, si existen, los valores de λ para los que el sistema tiene infinitas soluciones
 b) Resuelve el sistema para $\lambda = -2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1; \lambda = -2$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1; F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 1$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1; F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 1$$

$$\text{Para } \lambda = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 2F_1; F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = -2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 2F_1; F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 1$	1	1	S. compatible indeterminado
$\lambda = -2$	2	2	S. compatible indeterminado
$\lambda \neq 1$ y -2	3	3	S. compatible determinado

Luego, para $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ el sistema tiene infinitas soluciones

b) Para $\lambda = -2$, el sistema que tenemos que resolver es:
$$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) Estudia, según los valores de λ , el rango de la matriz $A - \lambda I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

b) Resuelve el sistema dado por $(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz $A - \lambda I$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 2; \lambda = 3$$

$$\text{Para } \lambda = 2 \Rightarrow A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A - 2I) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 3 \Rightarrow A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A - 3I) = 2$$

Si $\lambda \neq 2$ y $3 \Rightarrow \text{Rango}(A - \lambda I) = 3$.

b) Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -y - z = 0 \Rightarrow x = t; y = 0; z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + z = 1 \\ \lambda y + z = 0 \\ \lambda y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores de λ . b) Resuélvelo para $\lambda = 0$. c) Determina, si existe, el valor de λ para el que hay una solución en la que $z = 2$. Calcula esa solución.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda + 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 ; \lambda = 1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 0$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$\lambda = 1$	2	3	Sistema incompatible
$\lambda \neq 0$ y 1	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $\lambda = 0$, el sistema que tenemos que resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Si $z = 2$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\begin{cases} x + (\lambda + 1)y + 2 = 1 \\ \lambda y + 2 = 0 \\ \lambda y + 2\lambda = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + (\lambda + 1)y = -1 \\ \lambda y = -2 \\ \lambda y = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2 ; x = 2 ; y = -1 ; z = 2$$

Considera el sistema de ecuaciones dado en forma matricial mediante $AX = B$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) Discute el sistema según los valores de m .

b) Resuelve el sistema para $m = -3$ y determina en dicho caso, si existe, una solución en la que $x = 2$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 + 3m = 0 \Rightarrow m = 0 ; m = -3$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

$$\text{Para } m = -3 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A) = 2$$

$$\text{Para } m = -3 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 2$$

	R(A)	R(M)	
$m = -3$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$m = 0$	2	3	Sistema incompatible
$m \neq 0$ y -3	3	3	Sistema compatible determinado

b) Para $m = -3$, el sistema que tenemos que resolver es:
$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ -x - y - 3z = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 - t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

Si $x = 2$, la solución del sistema sería: $x = 2 ; y = 4 ; z = -1$

De los datos recabados en un informe sobre los beneficios obtenidos por las empresas A , B y C el pasado año, se desprende lo siguiente:

- la empresa B obtiene el mismo beneficio que las empresas A y C juntas.
- el beneficio de la empresa A es la media aritmética del de las otras dos.

a) Determina si se puede hallar el beneficio de cada empresa sabiendo que A ha obtenido el doble que C .

b) Calcula el beneficio de cada empresa sabiendo que entre las tres han obtenido 210 millones de euros.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Planteamos el sistema de ecuaciones con los datos del problema

$$\left. \begin{array}{l} B = A + C \\ A = \frac{B + C}{2} \\ A = 2C \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A - B + C = 0 \\ 2A - B - C = 0 \\ A - 2C = 0 \end{array} \right\}.$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A - B + C = 0 \\ B - 3C = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 2C \\ B = 3C \\ C = C \end{array} \right.$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) Planteamos el nuevo sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} A - B + C = 0 \\ 2A - B - C = 0 \\ A + B + C = 210 \end{array} \right\}$$

Resolvemos el sistema por Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 210 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 210 \end{array} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A - B + C = 0 \\ B - 3C = 0 \\ 2B = 210 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 70 \\ B = 105 \\ C = 35 \end{array} \right.$$

Luego: $A = 70$ millones de € ; $B = 105$ millones de € ; $C = 35$ millones de €

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= 1 \\ 5x - 11y + 9z &= \lambda \\ x - 3y + 5z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de λ

b) Resuélvelo, si es posible, para $\lambda = 4$.

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 5 & -11 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -110 - 36 - 30 + 22 + 100 + 54 = 0$$

Como vale cero, el rango de A es 2. Calculamos el determinante de la ampliada y lo igualamos a cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -11 & \lambda \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -44 - 4\lambda - 15 + 11 + 40 + 6\lambda = 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

	R(A)	R(M)	
$\lambda = 4$	2	2	S. compatible indeterminado
$\lambda \neq 4$	2	3	S. Incompatible

b) Para $\lambda = 4$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y + 2z &= 1 \\ 5x - 11y + 9z &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2x - 4y &= 1 - 2z \\ 5x - 11y &= 4 - 9z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2z & -4 \\ 4-9z & -11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{5-14z}{-2} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-2z \\ 5 & 4-9z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}} = \frac{3-8z}{-2} \\ z = z \end{cases}$$