PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2000

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 3, Opción B

Los puntos $A(3,3,5)$ y $B(3,3,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo *ABCD*. El vértice *C* consecutivo de *B* está en la recta de ecuaciones $x=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+1}{2}$.
a) Determina el vértice *C*.
b) Determina el vértice *D*.
MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector $\vec{AB}=(0,0,-3)$. Calculamos la ecuación de un plano que pasa por *B* y es perpendicular a la recta que pasa por *A* y *B*.

$$-3z+D=0\Rightarrow -6+D=0\Rightarrow D=6\Rightarrow -3z+6=0\Rightarrow -z+2=0$$

El vértice es el punto de corte de la recta que nos dan y el plano que hemos calculado.

$$x=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=6-t \\ z=-1+2t \end{cases}$$

$$1-2t+2=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2},2\right)$$

b) Calculamos las coordenadas del punto medio de la diagonal *AC*.

$$M=\frac{A+C}{2}=\left(\frac{9}{4},\frac{15}{4},\frac{7}{2}\right)$$

Este punto *M* también es el punto medio de la diagonal *BD*, luego:

$$M=\frac{B+D}{2}=\left(\frac{9}{4},\frac{15}{4},\frac{7}{2}\right)\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+3}{2}=\frac{9}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{2} \\ \frac{b+3}{2}=\frac{15}{4}\Rightarrow b=\frac{9}{2} \\ \frac{c+2}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow c=5 \end{cases}$$

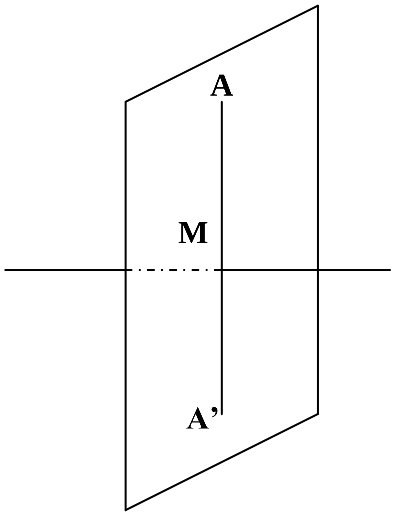
Luego, el vértice *D* es: $D=\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2},5\right)$

Calcula las coordenadas del punto simétrico del $(1,-3,7)$ respecto de la recta dada por las ecuaciones $x-1=y+3=\frac{z-4}{2}$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El punto *A*' simétrico del punto *A* respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto *A* es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto *A* a la recta es la misma que la que hay desde el punto *A*' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *A* es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

Vector normal del plano = vector director de la recta = (1,1,2)

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x+y+2z+D=0$

Como nos interesa el que pasa por el punto $A(1,-3,7)$

$$1-3+2\cdot 7+D=0\Rightarrow D=-12$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$1\cdot(1+t)+1\cdot(-3+t)+2\cdot(4+2t)-12=0\Rightarrow t=1$$

luego las coordenadas del punto *M* son: $x=1+1=2\,;\,y=-3+1=-2\,;\,z=4+2=6$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *A A*', si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *A*', se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2}=2\,;a=3\,;\ \frac{-3+b}{2}=-2\,;b=-1\,;\ \frac{7+c}{2}=6\,;c=5$$

Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta intersección de los planos de ecuaciones respectivas: $x+y+2z=4$; $2x-y+z=2$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=4 \\ 2x-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2-t \\ y=2-t \Rightarrow B=(2-t,2-t,t) \\ z=t \end{array}\right.$$

El vector $\vec{AB}=(2-t,2-t,t)$ y el vector director de la recta $(-1,-1,1)$, tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{AB}\cdot(-1,-1,1)=0 \Rightarrow -2+t-2+t+t=0 \Rightarrow t=\frac{4}{3}$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\vec{AB}=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$, luego:

Calculamos los vectores:; $d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{\frac{4+4+16}{9}}=\sqrt{\frac{8}{3}}=1'63\ u$

Calcula el punto de la recta de ecuaciones $x-1=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ más cercano al punto $A(1,-1,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.

$$x-1=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-3}\Rightarrow\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+2t\\ z=-1-3t\end{cases}\Rightarrow B=(1+t,-2+2t,-1-3t)$$

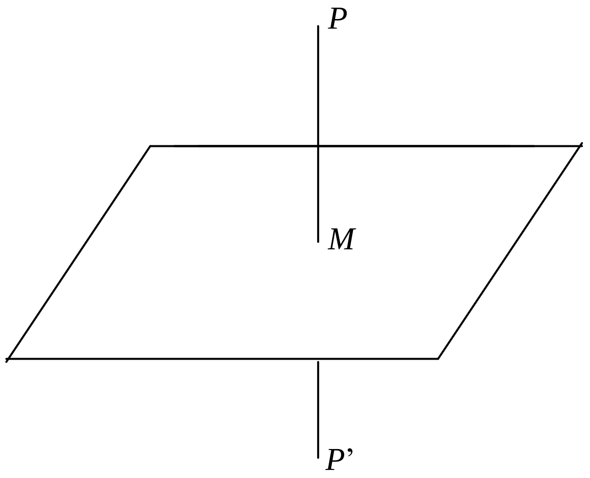
El vector $\vec{AB}=(t,-1+2t,-2-3t)$ y el vector director de la recta $(1,2,-3)$, tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{AB}\cdot(1,2,-3)=0\Rightarrow t-2+4t+6+9t=0\Rightarrow t=-\frac{4}{14}=-\frac{2}{7}$$

Luego, el punto más cercano es: $B=(1-\frac{2}{7},-2-\frac{4}{7},-1+\frac{6}{7})=\left(\frac{5}{7},-\frac{18}{7},-\frac{1}{7}\right)$

Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P(1,2,-2)$ respecto al plano de ecuación $3x+2y+z-7=0$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(3,2,1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2+2t \\ z = -2+t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $3\cdot(1+3t)+2\cdot(2+2t)+(-2+t)-7=0 \Rightarrow t=\frac{1}{7}$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $x=\frac{10}{7};\ y=\frac{16}{7};\ z=-\frac{13}{7}$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2}=\frac{10}{7};a=\frac{13}{7};\ \frac{b+2}{2}=\frac{16}{7};b=\frac{18}{7};\ \frac{c-2}{2}=-\frac{13}{7};c=-\frac{12}{7}$$

Luego, el punto simétrico es el $P'\left(\frac{13}{7},\frac{18}{7},-\frac{12}{7}\right)$

Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es $(-1,2,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El vector normal del plano será $\vec{n} = (-1,2,1) - (0,0,0) = (-1,2,1)$. Por lo tanto, el plano será:

$$-x + 2y + z + D = 0$$

y como tiene que pasar por el punto $(-1,2,1)$, tenemos que:

$$-(-1) + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow -x + 2y + z - 6 = 0$$

Determina los puntos de la recta de ecuaciones $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$ que equidistan de los planos de ecuaciones $3x+4y-1=0$; $4x-3z-1=0$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=-2+2t\end{cases}\Rightarrow P=(1+2t,-1+3t,-2+2t)$$

$$\frac{3(1+2t)+4(-1+3t)-1}{\sqrt{9+16}}=+\frac{4(1+2t)-3(-2+2t)-1}{\sqrt{16+9}}\Rightarrow t=\frac{11}{16}\Rightarrow P=\left(\frac{19}{8},\frac{17}{16},-\frac{5}{8}\right)$$

$$\frac{3(1+2t)+4(-1+3t)-1}{\sqrt{9+16}}=-\frac{4(1+2t)-3(-2+2t)-1}{\sqrt{16+9}}\Rightarrow t=-\frac{7}{20}\Rightarrow P=\left(\frac{3}{10},-\frac{41}{20},-\frac{27}{10}\right)$$

Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por: $r \equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{-2}$; $s \equiv \frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2}$

MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos las dos rectas a paramétricas y calculamos un punto genérico de cada recta.

$$r \equiv x-1=y-2=\frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1-2t \end{cases} \Rightarrow A=(1+t,2+t,1-2t)$$

$$s \equiv \frac{x-4}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=4-s \\ y=-1+3s \\ z=2s \end{cases} \Rightarrow B=(4-s,-1+3s,2s)$$

Calculamos las coordenadas del vector $\vec{AB}=(3-s-t,-3+3s-t,-1+2s+2t)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{AB}\cdot(1,1,-2)=0 \Rightarrow -2s-6t+2=0 \\ \vec{AB}\cdot(-1,3,2)=0 \Rightarrow 14s+2t-14=0 \end{array}\right\} \Rightarrow s=1 \; ; \; t=0$$

Luego, la perpendicular común es: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-1}{1}$

Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos $2x-2y+z-1=0$ y $2x-2y+z-5=0$
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la distancia entre los dos planos. Como los dos planos son paralelos, calculamos la distancia entre un punto del primer plano, por ejemplo, el $A=(0,0,1)$ y el segundo plano.

$$d=\frac{|1-5|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4}{3}$$

Como esta distancia coincide con la arista del cubo, su volumen será: $V=d^{3}=\left(\frac{4}{3}\right)^{3}=\frac{64}{27}\ u^{3}$