

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano  $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$  con la recta  $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$  y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta  $s$  con el plano. Para ello, pasamos la recta a paramétricas y la sustituimos en el plano.

$$s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$3t + 2 + t + 1 - t + 6 = 0 \Rightarrow t = -3$$

Luego el punto de corte es:  $A(-9, -1, -4)$ .

Calculamos el vector director de la recta  $r$ : 
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -13)$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: 
$$\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-13}$$

Calcula el área del triángulo de vértices  $A(1,1,2)$  ;  $B(1,0,-1)$  ;  $C(1,-3,2)$ .  
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos los vectores:  $\vec{AB} = (0, -1, -3)$  ;  $\vec{AC} = (0, -4, 0)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-12, 0, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 0^2 + 0^2} = 6 \text{ u}^2$$

Considera los puntos  $A(1, -3, 2)$ ,  $B(1, 1, 2)$  y  $C(1, 1, -1)$ .

a) ¿Pueden ser  $A$ ,  $B$  y  $C$  vértices consecutivos de un rectángulo?. Justifica la respuesta.

b) Halla, si es posible las coordenadas de un punto  $D$  para que el paralelogramo  $ABCD$  sea un rectángulo.

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores:  $\vec{AB} = (0, 4, 0)$  y  $\vec{BC} = (0, 0, 3)$ . Si forman un rectángulo, su producto escalar debe valer cero.

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$  Si pueden ser los vértices consecutivos de un rectángulo.

b) La recta que pasa por  $A$  y es paralela al lado  $BC$  es:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

La recta que pasa por  $C$  y es paralela al lado  $AB$  es:  $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 4s \\ z = -1 \end{cases}$

El punto de corte de estas dos rectas será el vértice  $D$ , luego:  $D = (1, -3, -1)$

Considera los puntos  $A(1,1,1)$ ;  $B(2,2,2)$ ;  $C(1,1,0)$  y  $D(1,0,0)$ .

a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos  $A$  y  $B$  y no corta a la recta determinada por  $C$  y  $D$ .

b) Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos  $AB$  y  $CD$ .

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por  $A=(1,1,1)$ ;  $\vec{AB}=(1,1,1)$ ;  $\vec{CD}=(0,-1,0)$ , luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x-z=0$$

b) Calculamos los puntos medios:  $\frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$  y  $\frac{C+D}{2} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$

La ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es:  $\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}$

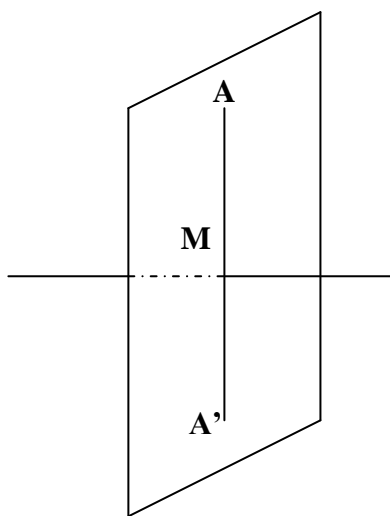
Considera los puntos  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(1, 3, 0)$  y  $C(0, 0, 1)$ . Halla el punto simétrico de  $A$  respecto de la recta que pasa por  $B$  y  $C$ .

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la recta que pasa por  $B$  y  $C$ :  $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = t \end{cases}$

El punto  $A'$  simétrico del punto  $A$  respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto  $A$  es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto  $A$  a la recta es la misma que la que hay desde el punto  $A'$  hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto  $A$  es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta =  $(-1, -3, 1)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es:  $-x - 3y + z + D = 0$ . Como nos interesa el que pasa por el punto  $A(1, -1, 2)$

$$-(1) - 3 \cdot (-1) + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow -x - 3y + z - 4 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $M$ ); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:  $-(1-t) - 3(3-3t) + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{14}{11}$

luego las coordenadas del punto  $M$  son:  $x = 1 - \frac{14}{11} = -\frac{3}{11}$ ;  $y = 3 - \frac{42}{11} = -\frac{9}{11}$ ;  $z = \frac{14}{11}$

Como el punto  $M$  es el punto medio del segmento  $AA'$ , si llamamos  $(a, b, c)$  a las coordenadas del punto  $A'$ , se debe verificar que:  $\frac{1+a}{2} = -\frac{3}{11}$ ;  $a = -\frac{17}{11}$ ;  $\frac{-1+b}{2} = -\frac{9}{11}$ ;  $b = -\frac{7}{11}$ ;  $\frac{2+c}{2} = \frac{14}{11}$ ;  $c = \frac{6}{11}$

Luego, el punto simétrico es:  $\left(-\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)$ .

Sea  $\pi$  el plano de ecuación  $3x - y + 2z - 4 = 0$

a) Halla la ecuación del plano  $\pi_1$  que es paralelo a  $\pi$  y pasa por el punto  $P = (1, -2, 2)$ .

b) Halla la ecuación del plano  $\pi_2$  perpendicular a ambos que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.**

## R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de todos los planos paralelos a  $\pi$  es:  $3x - y + 2z - D = 0$ . El que pasa por el punto  $P = (1, -2, 2)$ , será:  $3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 - D = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x - y + 2z - 9 = 0$ .

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta  $r$  es:

$$x - y + z - 1 + k(2x + y - 4z - 1) = 0 \Rightarrow (1 + 2k)x + (-1 + k)y + (1 - 4k)z - 1 - k = 0$$

Como que hemos de que sea perpendicular a  $\pi$  y  $\pi_1$ , Sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

$$(1 + 2k) \cdot 3 + (-1 + k) \cdot (-1) + (1 - 4k) \cdot 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \pi_2 \equiv 5x + y - 7z - 3 = 0$$

Halla el punto de la recta  $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$  que está más cercano al punto  $P(1, -1, 0)$ .

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas:  $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A(4, -1, 0) ; \vec{u}(2, -1, 1)$

Cualquier punto de la recta  $r$ , tendrá de componentes  $B(4 + 2t, -1 - t, t)$ . El vector  $\vec{PB}(3 + 2t, -t, t)$  tiene que ser perpendicular al vector  $\vec{u}(2, -1, 1)$ , luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{PB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (3 + 2t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (t) = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto que nos piden es:  $B(2, 0, -1)$



Considera la recta  $r$  y el plano  $\pi$  siguientes:  $r \equiv \begin{cases} x+z-a=0 \\ y-az-1=0 \end{cases}$ ,  $\pi \equiv 2x-y=b$

a) Determina  $a$  y  $b$  sabiendo que  $r$  está contenida en  $\pi$ .

b) Halla la ecuación de un plano que contenga a  $r$  y sea perpendicular a  $\pi$ .

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Formamos un sistema de ecuaciones con las tres ecuaciones.

$$\begin{cases} x+z-a=0 \\ y-az-1=0 \\ 2x-y=b \end{cases}$$

Para que la recta esté contenida en el plano el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada deben valer 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = b + 5 = 0 \Rightarrow b = -5$$

b) Calculamos el haz de planos que contiene a la recta  $r$ .

$$x+z-a+k(y-az-1)=0 \Rightarrow x+ky+(1-ak)z-a-k=0$$

Como tiene que ser perpendicular al plano  $\pi$ , sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, luego:

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot k + 0 \cdot (1 - ak) = 0 \Rightarrow k = 2$$

Por lo tanto, el plano que nos piden tiene de ecuación:  $x+2y+(1-2a)z-a-2=0$

**Determina la recta que no corta al plano de ecuación  $x - y + z = 7$  y cuyo punto más cercano al origen es  $(1, 2, 3)$ .**

**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Supongamos que el vector director de la recta que buscamos  $\vec{u} = (a, b, c)$ .

El vector que une el origen con el punto  $(1, 2, 3)$ , tiene que ser perpendicular al vector  $\vec{u} = (a, b, c)$ , luego:

$$(1, 2, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0$$

El vector normal del plano y el vector  $\vec{u} = (a, b, c)$  tienen que ser perpendiculares, luego:

$$(1, -1, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + 3c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5c}{3} \\ b = -\frac{2c}{3} \\ c = c \end{cases}$$

Si damos a  $c$  el valor 3, el vector que buscamos será el  $\vec{u} = (-5, -2, 3)$ . La recta pedida tendrá de

ecuación:  $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$

Sabiendo que las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$  se cortan, determina  $a$  y el punto de corte.  
**MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Formamos un sistema de ecuaciones con las dos rectas.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \\ x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$$

Para que las dos rectas se corten el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe ser 3, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2a \end{vmatrix} = 7a - 19 = 0 \Rightarrow a = \frac{19}{7}$$

Resolviendo el sistema sale que el punto de corte es:  $\left(\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

Los puntos  $A(1,0,2)$  y  $B(-1,0,-2)$  son vértices opuestos de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos  $A$  y  $B$  que pasa por su punto medio.

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la diagonal que será el módulo del vector  $\vec{AB} = (-2, 0, -4)$ .

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20}$$

Aplicando Pitágoras, tenemos que:

$$20 = l^2 + l^2 \Rightarrow \text{Área} = l^2 = 10 u^2$$

b) El punto medio tendrá de coordenadas:  $\frac{A+B}{2} = (0,0,0)$  y como el vector normal del plano es el

vector  $\vec{AB} = (-2, 0, -4)$ , tenemos que:

$$-2x - 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x + 2z = 0$$

Luego el plano pedido tiene de ecuación:  $x + 2z = 0$

Considera el plano  $\pi \equiv x - y + 2z = 3$  y el punto  $A(-1, -4, 2)$ .

a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $A$ .

b) Halla el punto simétrico de  $A$  respecto de  $\pi$ .

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por  $A(-1, -4, 2)$  y su vector director es el vector normal del plano, luego, su ecuación será:  $\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{2}$

b) Pasamos la recta a paramétricas

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+t \\ y = -4-t \\ z = 2+2t \end{cases}$$

y calculamos el punto de corte con el plano.

$$-1+t - (-4-t) + 2(2+2t) = 3 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Luego, el punto de corte tiene de coordenadas:

$$M\left(-1-\frac{2}{3}, -4+\frac{2}{3}, 2-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico, serán:

$$\frac{-1+a}{2} = -\frac{5}{3}; a = -\frac{7}{3}; \frac{-4+b}{2} = -\frac{10}{3}; b = -\frac{8}{3}; \frac{2+c}{2} = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3}$$

El punto pedido es  $A' = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$