

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 3, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Calcula la ecuación de una recta que pasa por el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + y - z + 6 = 0$ con la recta $s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y - 4 = 0 \\ 4x - 3y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de corte de la recta s con el plano. Para ello, pasamos la recta a paramétricas y la sustituimos en el plano.

$$s \equiv \frac{x}{3} = y - 2 = z + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$3t + 2 + t + 1 - t + 6 = 0 \Rightarrow t = -3$$

Luego el punto de corte es: $A(-9, -1, -4)$.

Calculamos el vector director de la recta r : $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -13)$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x+9}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+4}{-13}$

Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,1,2)$; $B(1,0,-1)$; $C(1,-3,2)$.
MATEMÁTICAS II. 2002. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (0, -1, -3)$; $\vec{AC} = (0, -4, 0)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} (-12, 0, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 0^2 + 0^2} = 6 \text{ u}^2$$

Considera los puntos $A(1, -3, 2)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, 1, -1)$.

a) ¿Pueden ser A , B y C vértices consecutivos de un rectángulo?. Justifica la respuesta.

b) Halla, si es posible las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo $ABCD$ sea un rectángulo.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (0, 4, 0)$ y $\vec{BC} = (0, 0, 3)$. Si forman un rectángulo, su producto escalar debe valer cero.

$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow$ Si pueden ser los vértices consecutivos de un rectángulo.

b) La recta que pasa por A y es paralela al lado BC es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

La recta que pasa por C y es paralela al lado AB es: $s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 4s \\ z = -1 \end{cases}$

El punto de corte de estas dos rectas será el vértice D , luego: $D = (1, -3, -1)$

Considera los puntos $A(1,1,1)$; $B(2,2,2)$; $C(1,1,0)$ y $D(1,0,0)$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene a los puntos A y B y no corta a la recta determinada por C y D .

b) Halla las ecuaciones de la recta determinada por los puntos medios de los segmentos AB y CD .

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por $A=(1,1,1)$; $\vec{AB}=(1,1,1)$; $\vec{CD}=(0,-1,0)$, luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x-z=0$$

b) Calculamos los puntos medios: $\frac{A+B}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $\frac{C+D}{2} = \left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$

La ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos es: $\frac{x-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{3}{2}}{-1} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}}$

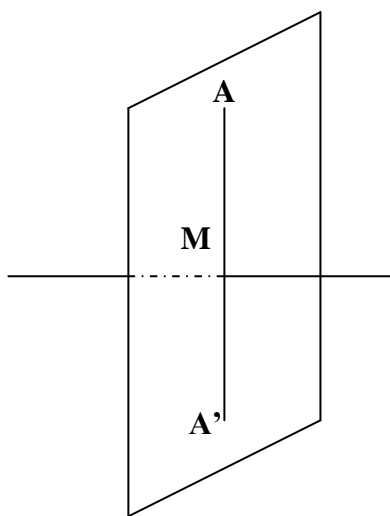
Considera los puntos $A(1, -1, 2)$, $B(1, 3, 0)$ y $C(0, 0, 1)$. Halla el punto simétrico de A respecto de la recta que pasa por B y C .

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la recta que pasa por B y C : $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - 3t \\ z = t \end{cases}$

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(-1, -3, 1)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $-x - 3y + z + D = 0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $A(1, -1, 2)$

$$-(1) - 3 \cdot (-1) + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -4 \Rightarrow -x - 3y + z - 4 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $-(1-t) - 3(3-3t) + t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{14}{11}$

luego las coordenadas del punto M son: $x = 1 - \frac{14}{11} = -\frac{3}{11}$; $y = 3 - \frac{42}{11} = -\frac{9}{11}$; $z = \frac{14}{11}$

Como el punto M es el punto medio del segmento AA' , si llamamos (a, b, c) a las coordenadas del punto A' , se debe verificar que: $\frac{1+a}{2} = -\frac{3}{11}$; $a = -\frac{17}{11}$; $\frac{-1+b}{2} = -\frac{9}{11}$; $b = -\frac{7}{11}$; $\frac{2+c}{2} = \frac{14}{11}$; $c = \frac{6}{11}$

Luego, el punto simétrico es: $\left(-\frac{17}{11}, -\frac{7}{11}, \frac{6}{11}\right)$.

Sea π el plano de ecuación $3x - y + 2z - 4 = 0$

a) Halla la ecuación del plano π_1 que es paralelo a π y pasa por el punto $P = (1, -2, 2)$.

b) Halla la ecuación del plano π_2 perpendicular a ambos que contiene a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 4z = 1 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 2. EJERCICIO 3. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de todos los planos paralelos a π es: $3x - y + 2z - D = 0$. El que pasa por el punto $P = (1, -2, 2)$, será: $3 \cdot 1 - (-2) + 2 \cdot 2 - D = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow \pi_1 \equiv 3x - y + 2z - 9 = 0$.

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x - y + z - 1 + k(2x + y - 4z - 1) = 0 \Rightarrow (1 + 2k)x + (-1 + k)y + (1 - 4k)z - 1 - k = 0$$

Como que hemos de ser perpendicular a π y π_1 , Sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

$$(1 + 2k) \cdot 3 + (-1 + k) \cdot (-1) + (1 - 4k) \cdot 2 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \pi_2 \equiv 5x + y - 7z - 3 = 0$$

Halla el punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ que está más cercano al punto $P(1, -1, 0)$.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A(4, -1, 0) ; \vec{u}(2, -1, 1)$

Cualquier punto de la recta r , tendrá de componentes $B(4 + 2t, -1 - t, t)$. El vector $\vec{PB}(3 + 2t, -t, t)$ tiene que ser perpendicular al vector $\vec{u}(2, -1, 1)$, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{PB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 \cdot (3 + 2t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (t) = 0 \Rightarrow t = -1$$

Luego, el punto que nos piden es: $B(2, 0, -1)$

Considera la recta r y el plano π siguientes: $r \equiv \begin{cases} x+z-a=0 \\ y-az-1=0 \end{cases}$, $\pi \equiv 2x-y=b$

a) Determina a y b sabiendo que r está contenida en π .

b) Halla la ecuación de un plano que contenga a r y sea perpendicular a π .

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos un sistema de ecuaciones con las tres ecuaciones.

$$\begin{cases} x+z-a=0 \\ y-az-1=0 \\ 2x-y=b \end{cases}$$

Para que la recta esté contenida en el plano el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada deben valer 2, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 - a = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & b \end{vmatrix} = b + 5 = 0 \Rightarrow b = -5$$

b) Calculamos el haz de planos que contiene a la recta r .

$$x+z-a+k(y-az-1)=0 \Rightarrow x+ky+(1-ak)z-a-k=0$$

Como tiene que ser perpendicular al plano π , sus vectores normales tienen que ser perpendiculares, luego:

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot k + 0 \cdot (1 - ak) = 0 \Rightarrow k = 2$$

Por lo tanto, el plano que nos piden tiene de ecuación: $x+2y+(1-2a)z-a-2=0$

Determina la recta que no corta al plano de ecuación $x - y + z = 7$ y cuyo punto más cercano al origen es $(1, 2, 3)$.

MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Supongamos que el vector director de la recta que buscamos $\vec{u} = (a, b, c)$.

El vector que une el origen con el punto $(1, 2, 3)$, tiene que ser perpendicular al vector $\vec{u} = (a, b, c)$, luego:

$$(1, 2, 3) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a + 2b + 3c = 0$$

El vector normal del plano y el vector $\vec{u} = (a, b, c)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$(1, -1, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a + 2b + 3c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{5c}{3} \\ b = -\frac{2c}{3} \\ c = c \end{cases}$$

Si damos a c el valor 3, el vector que buscamos será el $\vec{u} = (-5, -2, 3)$. La recta pedida tendrá de

ecuación: $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{3}$

Sabiendo que las rectas: $r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$ se cortan, determina a y el punto de corte.
MATEMÁTICAS II. 2002. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Formamos un sistema de ecuaciones con las dos rectas.

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y=2 \\ x-2y-z=a \\ 2x+z=a \end{cases}$$

Para que las dos rectas se corten el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada debe ser 3, luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & a+1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2a \\ 2 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & a+1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2a \end{vmatrix} = 7a - 19 = 0 \Rightarrow a = \frac{19}{7}$$

Resolviendo el sistema sale que el punto de corte es: $\left(\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{7}\right)$

Los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,0,-2)$ son vértices opuestos de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Calcula el plano perpendicular al segmento de extremos A y B que pasa por su punto medio.

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la diagonal que será el módulo del vector $\vec{AB} = (-2, 0, -4)$.

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20}$$

Aplicando Pitágoras, tenemos que:

$$20 = l^2 + l^2 \Rightarrow \text{Área} = l^2 = 10 u^2$$

b) El punto medio tendrá de coordenadas: $\frac{A+B}{2} = (0,0,0)$ y como el vector normal del plano es el

vector $\vec{AB} = (-2, 0, -4)$, tenemos que:

$$-2x - 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x + 2z = 0$$

Luego el plano pedido tiene de ecuación: $x + 2z = 0$

Considera el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto $A(-1, -4, 2)$.

a) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por A .

b) Halla el punto simétrico de A respecto de π .

MATEMÁTICAS II. 2002. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por $A(-1, -4, 2)$ y su vector director es el vector normal del plano, luego, su ecuación será: $\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{2}$

b) Pasamos la recta a paramétricas

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1+t \\ y = -4-t \\ z = 2+2t \end{cases}$$

y calculamos el punto de corte con el plano.

$$-1+t - (-4-t) + 2(2+2t) = 3 \Rightarrow t = -\frac{2}{3}$$

Luego, el punto de corte tiene de coordenadas:

$$M\left(-1-\frac{2}{3}, -4+\frac{2}{3}, 2-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Las coordenadas del punto simétrico, serán:

$$\frac{-1+a}{2} = -\frac{5}{3}; a = -\frac{7}{3}; \frac{-4+b}{2} = -\frac{10}{3}; b = -\frac{8}{3}; \frac{2+c}{2} = \frac{2}{3}; c = -\frac{2}{3}$$

El punto pedido es $A' = \left(-\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$