

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones:

$$x-1 = y = 1-z \quad y \quad \begin{cases} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{cases}$$

a) Determina su punto de corte.

b) Halla el ángulo que forma  $r$  y  $s$ .

c) Determina la ecuación del plano que contiene a  $r$  y  $s$ .

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x-1 \\ y = 1-z \\ x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x=3; y=2; z=-1$$

Luego, el punto de corte es:  $(3, 2, -1)$

b) Pasamos las dos rectas a paramétricas.

$$x-1 = y = 1-z \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1+y \\ y = y \\ z = 1-y \end{array} \right\} \Rightarrow A = (1, 0, 1); \vec{u} = (1, 1, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x-2y = -1 \\ y+z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -1+2y \\ y = y \\ z = 1-y \end{array} \right\} \Rightarrow B = (-1, 0, 1); \vec{v} = (2, 1, -1)$$

El ángulo que forman  $r$  y  $s$  es el ángulo que forman sus vectores directores, luego:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2+1+1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = 0'9428 \Rightarrow \alpha = 19'47^\circ$$

c) El plano viene definido por el punto  $A$  y los vectores directores de las rectas, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y+z-1=0$$

Los puntos  $P(2,0,0)$  y  $Q(-1,12,4)$  son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice  $S$  pertenece a la recta  $r$  de ecuación  $\begin{cases} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{cases}$ .

a) Calcula las coordenadas del punto  $S$  sabiendo que  $r$  es perpendicular a la recta que pasa por  $P$  y  $S$ .

b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.

**MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} \begin{array}{l} 4x + 3z = 33 \\ y = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{33 - 3z}{4} \\ y = 0 \\ z = z \end{array} \end{array} \right\}$$

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas  $S = \left( \frac{33 - 3t}{4}, 0, t \right)$ . Calculamos el vector

$\vec{PS} = \left( \frac{33 - 3t}{4} - 2, 0, t - 0 \right) = \left( \frac{25 - 3t}{4}, 0, t \right)$ . Este vector es perpendicular al vector director de la recta, luego, su producto escalar vale cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{PS} = 0 \Rightarrow \left( -\frac{3}{4}, 0, 1 \right) \cdot \left( \frac{25 - 3t}{4}, 0, t \right) = 0 \Rightarrow -\frac{75}{16} + \frac{9t}{16} + t = 0 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto  $S$  tiene de coordenadas  $S = \left( \frac{33 - 9}{4}, 0, 3 \right) = (6, 0, 3)$

b) Calculamos el vector  $\vec{PQ} = (-3, 12, 4)$ .

$\vec{PQ} \cdot \vec{PS} = (-3, 12, 4) \cdot (4, 0, 3) = 0 \Rightarrow$  Son perpendiculares, luego, el triángulo es rectángulo en  $P$ .

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano  $6x + 3y + 2z = 6$  con los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados:  $A=(1,0,0)$ ;  $B=(0,2,0)$ ;  $C=(0,0,3)$ . Calculamos los vectores  $\vec{AB}=(-1,2,0)$  y  $\vec{AC}=(-1,0,3)$ .

Hacemos el producto vectorial de los vectores:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left( \vec{AB} \wedge \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{7}{2} u^2$$

Sean los puntos  $A(1,1,1)$ ,  $B(-1,2,0)$ ,  $C(2,1,2)$  y  $D(t,-2,2)$

a) Determina el valor de  $t$  para que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  estén en un mismo plano.

b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por  $A$  y  $B$ , que contenga al punto  $C$ .

**MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación del plano que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Para ello calculamos los vectores

$$\vec{AB} = (-2, 1, -1) \text{ y } \vec{AC} = (1, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x-1-y+1-z+1+2y-2=0 \Rightarrow x+y-z-1=0$$

Para que el punto  $D$  pertenezca al plano debe verificar la ecuación, luego:

$$x+y-z-1=0 \Rightarrow t-2-2-1=0 \Rightarrow t=5$$

b) Si es perpendicular al segmento  $AB$ , entonces el vector normal del plano es el vector

$$\vec{AB} = (-2, 1, -1), \text{ luego, el plano tiene de ecuación: } -2x + y - z + D = 0.$$

Como queremos que pase por el punto  $C$ , debe verificar esa ecuación.

$$-2x + y - z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 2 + 1 - 2 + D = 0 \Rightarrow D = 5$$

Luego el plano pedido es:  $-2x + y - z + 5 = 0$

Considera los puntos  $A(1,0,2)$  y  $B(-1,2,4)$  y la recta  $r$  definida por  $\frac{x+2}{2} = y-1 = \frac{z-1}{3}$

a) Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de  $A$  y de  $B$ .

b) Halla la ecuación del plano paralelo a  $r$  y que contiene a los puntos  $A$  y  $B$ .

**MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector  $\vec{AB} = (-2, 2, 2)$  y hallamos el punto medio del segmento  $AB$ ,  $M = (0, 1, 3)$ .

El plano perpendicular tiene de ecuación:  $-2x + 2y + 2z + D = 0$  y como tiene que pasar por el punto  $M$ , tenemos:

$$-2x + 2y + 2z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -8$$

Luego, el plano pedido es:  $-2x + 2y + 2z - 8 = 0 \Rightarrow -x + y + z - 4 = 0$

b) Calculamos la recta que pasa por  $A$  y  $B$ :  $\left. \begin{aligned} \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z-3=0 \end{cases} \end{aligned} \right\}$

Hallamos el haz de planos que contiene a dicha recta:

$$x + y - 1 + k(x + z - 3) = 0 \Rightarrow (1+k)x + y + kz - 1 - 3k = 0$$

El vector normal de dicho plano debe ser perpendicular al vector director de la recta  $r$ , luego, su producto escalar debe valer cero.

$$(1+k, 1, k) \cdot (2, 1, 3) = 0 \Rightarrow 2 + 2k + 1 + 3k = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

Luego, el plano pedido es:

$$x + y + 1 + k(x + z - 3) = 0 \Rightarrow x + y - 1 - \frac{3}{5}(x + z - 3) = 0 \Rightarrow 2x + 5y - 3z + 4 = 0$$

Considera los puntos  $A(1,1,1)$ ,  $B(0,-2,2)$ ,  $C(-1,0,2)$  y  $D(2,-1,2)$

a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices  $A, B, C$  y  $D$ .

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano que contiene a los puntos  $A, B$  y  $C$ .

**MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (-1, -3, 1)$ ;  $\vec{AC} = (-2, -1, 1)$  y  $\vec{AD} = (1, -2, 1)$ . El volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-5| = \frac{5}{6} u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k} = (-2, -1, -5)$$

La recta que nos piden es:  $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{-5}$

Considera los puntos  $A(1,2,1)$  y  $B(-1,0,3)$ .

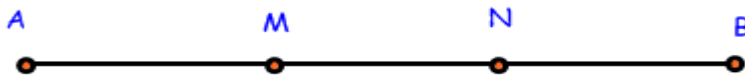
a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento  $AB$  en tres partes iguales.

b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento  $AB$  y que pasa por  $A$ .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el vector:  $\vec{AB} = (-2, -2, 2)$ . Según la figura, se cumple que:

$$\vec{AM} = \frac{1}{3} \vec{AB} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = (x-1, y-2, z-1) \Rightarrow M = \left(1 - \frac{2}{3}, 2 - \frac{2}{3}, 1 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

El punto  $N$  es el punto medio del segmento  $MB$ , luego:

$$N = \left(\frac{\frac{1}{3} - 1}{2}, \frac{\frac{4}{3} + 0}{2}, \frac{\frac{5}{3} + 3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

b) El vector normal del plano es  $\vec{AB} = (-2, -2, 2)$ , luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares al segmento  $AB$  es:  $-2x - 2y + 2z + D = 0$ .

Como queremos el plano que pasa por el punto  $A$ , se debe verificar que:

$$-2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 4$$

Luego, el plano pedido es:  $-2x - 2y + 2z + 4 = 0 \Rightarrow -x - y + z + 2 = 0$



Considera el plano  $\pi$  definido por  $2x - y + nz = 0$  y la recta  $r$  dada por  $\frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$  con  $m \neq 0$ .

a) Calcula  $m$  y  $n$  para que la recta  $r$  sea perpendicular al plano  $\pi$ .

b) Calcula  $m$  y  $n$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$ .

**MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector normal del plano  $(2, -1, n)$  y el vector director de la recta  $(m, 4, 2)$ , son paralelos, luego:

$$\frac{2}{m} = \frac{-1}{4} = \frac{n}{2} \Rightarrow m = -8 ; n = -\frac{1}{2}$$

b) Si la recta está contenida en el plano, el punto  $A = (1, 0, 1)$  de la recta debe pertenecer al plano, luego:

$$2 \cdot 1 - 0 + n \cdot 1 = 0 \Rightarrow n = -2$$

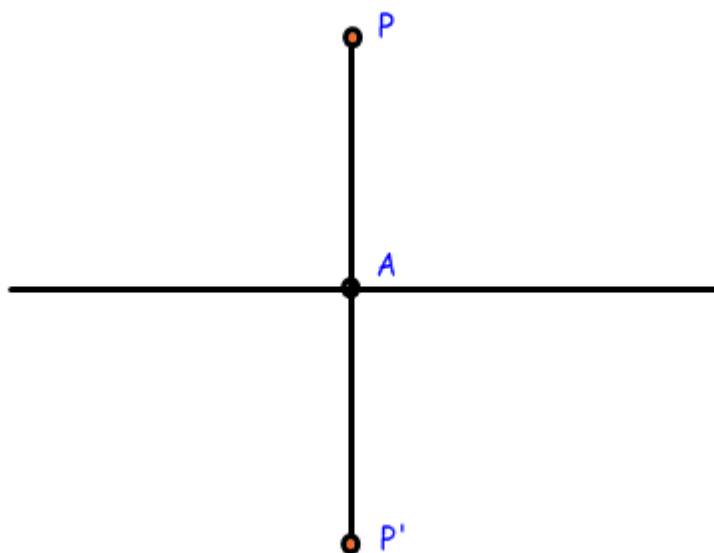
Además, si la recta está contenida en el plano, el vector normal del plano  $(2, -1, n)$  y el vector director de la recta  $(m, 4, 2)$ , son perpendiculares, luego:

$$(2, -1, -2) \cdot (m, 4, 2) = 0 \Rightarrow 2m - 4 - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

Halla el punto simétrico de  $P(1,1,1)$  respecto de la recta  $r$  de ecuación  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ .

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N



De la recta  $r$  sabemos:  $A = (1 + 2t, 3t, -1 - t)$ ;  $\vec{u} = (2, 3, -1)$

Para calcular el simétrico del punto  $P = (1, 1, 1)$  respecto de la recta, el vector  $\vec{PA} = (2t, 3t - 1, -2 - t)$  y el vector  $\vec{u} = (2, 3, -1)$  tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PA} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2t, 3t - 1, -2 - t) \cdot (2, 3, -1) = 0 \Rightarrow 4t + 9t - 3 + 2 + t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{14} \Rightarrow A = \left( \frac{16}{14}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P + P'}{2} = A \Rightarrow \left( \frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = \left( \frac{16}{14}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14} \right) \Rightarrow P' = \left( \frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7} \right)$$

Sean los puntos  $A(2, \lambda, \lambda)$ ,  $B(-\lambda, 2, 0)$  y  $C(0, \lambda, \lambda - 1)$ .

a) ¿Existe algún valor de  $\lambda \in \mathbb{R}$  para el que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  estén alineados?. Justifica la respuesta.

b) Para  $\lambda = 1$  halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

### R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos estén alineados, las coordenadas de los vectores  $\vec{AB} = (-\lambda - 2, 2 - \lambda, -\lambda)$  y  $\vec{AC} = (-2, 0, -1)$ , deben ser proporcionales, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{-1}{-\lambda} \Rightarrow \frac{-2}{-\lambda - 2} = \frac{0}{2 - \lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \\ \frac{0}{2 - \lambda} = \frac{-1}{-\lambda} \Rightarrow \lambda = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 2$$

b) El plano viene definido por el punto  $A = (2, 1, 1)$  y los vectores  $\vec{AB} = (-3, 1, -1)$  y  $\vec{AC} = (-2, 0, -1)$ . Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & -3 & -2 \\ y - 1 & 1 & 0 \\ z - 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2 + 2y - 2 + 2z - 2 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow -x - y + 2z + 1 = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} u$$

Halla la ecuación del plano que es paralelo a  $r$  de ecuaciones  $\begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases}$  y contiene a la recta

$$s \text{ definida por } \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta  $r$  a paramétricas  $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 11 = 0 \\ 2y + z - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -11 + 2y \\ y = y \\ z = 19 - 2y \end{cases}$

La recta  $r$ , viene definida por el punto  $A = (-11, 0, 19)$  y el vector director  $\vec{u} = (2, 1, -2)$ . La recta  $s$ , viene definida por el punto  $B = (1, -2, 2)$  y el vector director  $\vec{v} = (-5, 3, 2)$ .

El plano que nos piden viene definido por el punto  $B$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -5 \\ y+2 & 1 & 3 \\ z-2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x + 6y + 11z - 18 = 0$$

Considera los planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  y  $\pi_3$  dados respectivamente por las ecuaciones

$$x + y = 1, \quad ay + z = 0 \quad \text{y} \quad x + (1+a)y + az = a + 1$$

a) ¿Cuánto ha de valer  $a$  para que no tengan ningún punto en común?

b) Para  $a = 0$ , determina la posición relativa de los planos.

**MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} = a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 1; a = 0$$

	R(A)	R(M)	
$a = 0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a = 1$	2	3	S. Incompatible
$a \neq 0$ y $1$	3	3	S. Compatible Determinado

a) Para que los tres planos no tengan ningún punto en común tiene que ser  $a = 1$ .

b) Para  $a = 0$ , dos planos son coincidentes y el tercero los corta.