

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1,0,-1)$  y  $B(-1,1,0)$ .

a) Halla la ecuación de la recta  $s$  paralela a  $r$  que pasa por  $C(-2,3,2)$ .

b) Calcula la distancia de  $r$  a  $s$ .

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta  $r$ :  $\overline{AB}(-2,1,1)$

Como las rectas son paralelas, el vector director de  $s$  es  $\overline{AB}(-2,1,1)$ , luego, la ecuación de la recta  $s$  es:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{1} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto  $A = (1,0,-1)$  a la recta  $s$ . Para ello calculamos un plano perpendicular a  $s$  y que pase por el punto  $A = (1,0,-1)$

$$-2x + y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = 3 \Rightarrow -2x + y + z + 3 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta  $s$ .

$$\left. \begin{aligned} -2x + y + z + 3 &= 0 \\ x &= -2 - 2t \\ y &= 3 + t \\ z &= 2 + t \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2(-2 - 2t) + 3 + t + 2 + t + 3 = 0 \Rightarrow 12 + 6t = 0 \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto de corte es el  $M = (-2 + 4, 3 - 2, 2 - 2) = (2, 1, 0)$ . La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector  $\overrightarrow{AM} = (2 - 1, 1 - 0, 0 + 1) = (1, 1, 1)$ , luego:

$$d = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2} = \sqrt{3} \text{ u}$$

Sea  $r$  la recta definida por  $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

- a) Determina la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y pasa por el origen de coordenadas.  
b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a  $r$  en el punto  $(1,1,0)$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

- a) Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a  $r$ .

$$x + 2y - z - 3 + k(2x - y + z - 1) = 0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x + 2y - z - 3 + k(2x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 - 3 + k(0 + 0 + 0 - 1) = 0 \Rightarrow k = -3$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es:

$$x + 2y - z - 3 - 3(2x - y + z - 1) = 0 \Rightarrow -5x + 5y - 4z = 0.$$

- b) El vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -3, -5)$$

Luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a  $r$  es:  $x - 3y - 5z + D = 0$ . Como queremos que pase por el punto  $(1,1,0)$ , su ecuación será:

$$x - 3y - 5z + D = 0 \Rightarrow 1 - 3 \cdot 1 - 0 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow x - 3y - 5z + 2 = 0$$

Pasamos el plano de general a paramétricas:

$$x - 3y - 5z + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 3t + 5s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

Sean los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{w} = (\lambda, 1, 0)$ .

a) Calcula los valores de  $\lambda$  que hacen que  $\vec{u}$  y  $\vec{w}$  sean ortogonales.

b) Calcula los valores de  $\lambda$  que hacen que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  sean linealmente independientes.

c) Para  $\lambda = 1$  escribe el vector  $\vec{r} = (3, 0, 2)$  como combinación lineal de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(1, -1, 3) \cdot (\lambda, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

b) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -4$$

Luego, son independientes para todos los valores de  $\lambda \neq -4$ .

c) Escribimos el vector  $\vec{r} = (3, 0, 2)$  como combinación lineal de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

$$(3, 0, 2) = a \cdot (1, -1, 3) + b \cdot (1, 0, -1) + c \cdot (1, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ -a + c = 0 \\ 3a - b = 2 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} a = 1; b = 1; c = 1$$

Luego la combinación lineal es:  $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Sea  $r$  la recta dada por  $\frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3}$  y sea  $s$  la recta dada por  $\left. \begin{array}{l} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{array} \right\}$ .

a) Determina la posición relativa de  $r$  y  $s$ .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

## R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$r \equiv \frac{x+2}{2} = y+1 = \frac{z-1}{-3} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{array} \right\} \Rightarrow A = (-2, -1, 1); \vec{u} = (2, 1, -3)$$

$$s \equiv \left. \begin{array}{l} x - y - 3 = 0 \\ 3y - z + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 + t \\ y = t \\ z = 6 + 3t \end{array} \right\} \Rightarrow B = (3, 0, 6); \vec{v} = (1, 1, 3)$$

Calculamos el determinante de  $\vec{AB} = (5, 1, 5)$ ,  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 3 + 10 - 5 - 6 + 15 = 26 \neq 0 \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) El plano que nos piden viene determinado por  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3x+6-3y-3+2z-2-z+1-6y-6+3x+6 = 6x-9y+z+2=0$$

Sean los vectores  $\vec{u} = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, 2)$  y  $\vec{w} = (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha)$ . Halla los valores de  $\alpha$  en cada uno de los siguientes casos:

a)  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  están en el mismo plano.

b)  $\vec{w}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  es  $\frac{1}{6}$

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Si están en un mismo plano, los vectores son linealmente dependientes, luego, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 2 & 2-3\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Luego, están en el mismo plano si  $\alpha = 0$ .

b) Si  $\vec{w}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , su producto escalar debe valer 0.

$$(1, -1, 0) \cdot (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha) = 1 + \alpha - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(0, 1, 2) \cdot (1 + \alpha, 2\alpha, 2 - 3\alpha) = 2\alpha + 4 - 6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego, para  $\alpha = 1$  el vector  $\vec{w}$  es perpendicular a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

c) El volumen del tetraedro es  $\frac{1}{6}$  del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = \frac{1}{6} = \frac{1}{6} |-9\alpha| \Rightarrow |-9\alpha| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{9} \\ 9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Considera el punto  $P(2,-2,0)$  y la recta  $r$  dada por  $\left. \begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\}$ .

a) Determina la ecuación del plano que contiene a  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

b) Calcula la distancia de  $P$  a  $r$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta  $r$  a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{array} \right\}$$

Con lo cual el vector director es:  $\vec{u} = (-1, -1, 1)$ .

Todos los planos perpendiculares a  $r$  tienen de ecuación:  $-x - y + z + D = 0$ . Como queremos que pase por el punto  $P$ :

$$-x - y + z + D = 0 \Rightarrow -2 + 2 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0$$

Luego, el plano que nos piden es:  $-x - y + z = 0$ .

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-x - y + z = 0 \Rightarrow -2 + t - 1 + t + t = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de corte es:  $M = (2-1, 1-1, 1) = (1, 0, 1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une  $P$  y el punto  $M$ , es decir:

$$|\vec{PM}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} u$$

Sean  $A(-3,4,0)$ ,  $B(3,6,3)$  y  $C(-1,2,1)$  los vértices de un triángulo.

a) Halla la ecuación del plano  $\pi$  que contiene al triángulo.

b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por el origen de coordenadas.

c) Calcula el área del triángulo  $ABC$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto  $A = (-3,4,0)$  y los vectores  $\overrightarrow{AB} = (6,2,3)$  y  $\overrightarrow{AC} = (2,-2,1)$ .

Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x - 2z + 3 = 0$$

b) La recta viene definida por el punto  $(0,0,0)$  y su vector director será el vector normal del plano

$\vec{u} = (1,0,-2)$ . Luego su ecuación será:  $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo  $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 16\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{64 + 0 + 256} = \frac{\sqrt{320}}{2} u^2$$

Considera el punto  $A(8, -1, 3)$  y la recta  $r$  dada por  $\frac{x+1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{3}$ .

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por  $A$  y es perpendicular a  $r$ .

b) Halla el punto simétrico de  $A$  respecto de  $r$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas:  $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ . El vector director de la recta  $(2, 1, 3)$ , es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x + y + 3z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto  $(8, -1, 3)$ .

$$2x + y + 3z + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 8 - 1 + 3 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

Luego, el plano que nos piden es:  $2x + y + 3z - 24 = 0$ .

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x + y + 3z - 24 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (-1 + 2t) + (2 + t) + 3 \cdot (1 + 3t) - 24 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Luego, el punto de corte es:  $M = \left(-1 + 3, 2 + \frac{3}{2}, 1 + \frac{9}{2}\right) = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$ .

Si llamamos al punto simétrico  $P' = (a, b, c)$ , se cumple que:

$$\frac{(8, -1, 3) + (a, b, c)}{2} = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right) \Rightarrow P' = (-4, 8, 8)$$

Sea  $r$  la recta definida por  $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$  y  $s$  la recta dada por  $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-2}$ .

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a  $r$  y a  $s$ .

b) Calcula la distancia entre  $r$  y  $s$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A = (1+t, 1+t, t)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B = (1-2s, s, 1-2s)$

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular a la recta  $r$  y  $s$  se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow 3t+3s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (-2, 1, -2) = 0 \Rightarrow 3-3t-9s = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que  $t = -\frac{1}{2}$ ;  $s = \frac{1}{2}$

Luego, los puntos  $A$  y  $B$  que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right); \quad B = \left( 0, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por:  $A = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$  y  $\vec{AB} = \left( -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$ . Su ecuación es:

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y - \frac{1}{2}}{0} = \frac{z + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

b) La distancia es el módulo del vector  $\vec{AB} = \left( -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$$

Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $2x + y - z + 2 = 0$  y la recta  $r$  de ecuación  $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3}$

a) Halla la posición relativa de  $\pi$  y  $r$ .

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ .

c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a  $\pi$  que contiene a  $r$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta  $r$  a implícitas  $\frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{cases}$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano  $\left. \begin{array}{l} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{array} \right\}$

Como  $R(A) = 2$  y  $R(M) = 3$ , la recta es paralela al plano

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta  $r$  es:

$$x + 2y - 5 + k(-3x + 2z + 3) = 0 \Rightarrow (1 - 3k)x + 2y + 2kz - 5 + 3k = 0$$

El vector normal de este plano  $(1 - 3k, 2, 2k)$  y el vector normal del plano  $\pi$   $(2, 1, -1)$ , tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1 - 3k, 2, 2k) \cdot (2, 1, -1) = 0 \Rightarrow 2 - 6k + 2 - 2k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es:  $-x + 4y + 2z - 7 = 0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta  $r$  es:

$$x + 2y - 5 + k(-3x + 2z + 3) = 0 \Rightarrow (1 - 3k)x + 2y + 2kz - 5 + 3k = 0$$

El vector normal de este plano  $(1 - 3k, 2, 2k)$  y el vector normal del plano  $\pi$   $(2, 1, -1)$ , tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1 - 3k}{2} = \frac{2}{1} = \frac{2k}{-1} \Rightarrow k = -1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es:  $2x + y - z - 4 = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 4 - 2t + s \\ z = s \end{array} \right\}$

Considera los puntos  $A(1,1,2)$  y  $B(1,-1,-2)$  y la recta  $r$  dada por 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} .$$

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y es paralelo a la recta que pasa por  $A$  y por  $B$ .

b) Halla el punto de la recta  $r$  que está a la misma distancia de  $A$  y de  $B$ .

**MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por el punto  $(1,0,1)$  de la recta, el vector director de la recta  $\vec{u} = (2,1,0)$  y el vector  $\vec{AB} = (0,-2,-4)$ . Por lo tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2y - z + 2 = 0$$

b) Calculamos los vectores:

$$\vec{AC} = (1+2t-1, t-1, 1-2) = (2t, t-1, -1); \vec{BC} = (1+2t-1, t+1, 1+2) = (2t, t+1, 3)$$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\left| \vec{AC} \right| = \left| \vec{BC} \right| \Rightarrow \sqrt{4t^2 + (t-1)^2 + 1} = \sqrt{4t^2 + (t+1)^2 + 9} \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto  $C$  es:  $C = (1+2t, t, 1) = (-3, -2, 1)$

Sea  $r$  la recta que pasa por los puntos  $A(1,0,-1)$  y  $B(2,-1,3)$ .

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta  $r$ .

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a  $r$  y pasa por el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a  $r$ :  $x - y + 4z + D = 0$ .

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto  $(0,0,0)$ , luego:

$$x - y + 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 4 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x - y + 4z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$x - y + 4z = 0 \Rightarrow 1 + t + t + 4(-1 + 4t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Luego, el punto de corte es:  $M = \left(1 + \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1 + \frac{4}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une el origen de coordenadas y el punto  $M$ , es decir:

$$|\vec{OM}| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ u}$$

b) La ecuación de la recta que pasa por  $O$  y  $M$  es:  $\frac{x}{\frac{7}{6}} = \frac{y}{-\frac{1}{6}} = \frac{z}{-\frac{2}{6}}$