PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2014

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

Considera la recta *r* que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

a) Halla la ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por $C(-2,3,2)$.

b) Calcula la distancia de *r* a *s*.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta *r*: $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$

Como las rectas son paralelas, el vector director de *s* es $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$, luego, la ecuación de la recta *s* es:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2-2t \\ y=3+t \\ z=2+t \end{array}\right\}$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A=(1,0,-1)$ a la recta s. Para ello calculamos un plano perpendicular a *s* y que pase por el punto $A=(1,0,-1)$

$$-2x+y+z+D=0\Rightarrow -2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1)+D=0\Rightarrow D=3\Rightarrow -2x+y+z+3=0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} -2x+y+z+3=0 \\ x=-2-2t \\ y=3+t \\ z=2+t \end{array}\right\}\Rightarrow -2(-2-2t)+3+t+2+t+3=0\Rightarrow 12+6t=0\Rightarrow t=-2$$

Luego, el punto de corte es el $M=\left(-2+4,3-2,2-2\right)=\left(2,1,0\right)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM}=\left(2-1,1-0,0+1\right)=\left(1,1,1\right)$, luego:

$$d=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{\left(1\right)^2+\left(1\right)^2+\left(1\right)^2}=\sqrt{3}\ u$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1,1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a r.

$$x+2y-z-3+k(2x-y+z-1)=0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x+2y-z-3+k(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow 0+0+0-3+k(0+0+0-1)=0 \Rightarrow k=-3$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es:

$$x+2y-z-3-3(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow -5x+5y-4z=0.$$

b) El vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-5)$$

Luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a r es: $x-3y-5z+D=0$. Como queremos que pase por el punto $(1,1,0)$, su ecuación será:

$$x-3y-5z+D=0 \Rightarrow 1-3\cdot 1-0+D=0 \Rightarrow D=2 \Rightarrow x-3y-5z+2=0$$

Pasamos el plano de general a paramétricas:

$$x-3y-5z+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2+3t+5s \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$

Sean los vectores $\vec{u}=(1,-1,3)$, $\vec{v}=(1,0,-1)$ y $\vec{w}=(\lambda,1,0)$.

a) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

b) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) Para $\lambda=1$ escribe el vector $\vec{r}=(3,0,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(1,-1,3)\cdot(\lambda,1,0)=\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=1$$

b) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}=\lambda+3+1\neq 0\Rightarrow\lambda\neq-4$$

Luego, son independientes para todos los valores de $\lambda\neq-4$.

c) Escribimos el vector $\vec{r}=(3,0,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$(3,0,2)=a\cdot(1,-1,3)+b\cdot(1,0,-1)+c\cdot(1,1,0)\Rightarrow \left.\begin{matrix} a+b+c=3 \\ -a+c=0 \\ 3a-b=2 \end{matrix}\right\} a=1\ ;\ b=1\ ;\ c=1$$

Luego la combinación lineal es: $\vec{r}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

Sea *r* la recta dada por $\frac{x+2}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}$ y sea *s* la recta dada por $\left.\begin{array}{r} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{array}\right\}$.

a) Determina la posición relativa de *r* y *s*.

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a *r* y es paralelo a *s*.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$r\equiv \frac{x+2}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2+2t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{array}\right\}\Rightarrow A=(-2,-1,1)\ ;\ \vec{u}=(2,1,-3)$$

$$s\equiv \left.\begin{array}{r} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3+t \\ y=t \\ z=6+3t \end{array}\right\}\Rightarrow B=(3,0,6)\ ;\ \vec{v}=(1,1,3)$$

Calculamos el determinante de $\vec{AB}=(5,1,5)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=15-3+10-5-6+15=26\neq 0\Rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) El plano que nos piden viene determinado por $(A,\vec{u},\vec{v})$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3x+6-3y-3+2z-2-z+1-6y-6+3x+6=6x-9y+z+2=0$$

Sean los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\vec{w}=(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

b) $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{1}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si están en un mismo plano, los vectores son linealmente dependientes, luego, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 2 & 2-3\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Luego, están en el mismo plano si $\alpha = 0$.

b) Si $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su producto escalar debe valer 0.

$$(1,-1,0)\cdot(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha) = 1+\alpha-2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(0,1,2)\cdot(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha) = 2\alpha+4-6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego, para $\alpha = 1$ el vector $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left|-9\alpha\right| \Rightarrow \left|-9\alpha\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{9} \\ 9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta *r* dada por $\left.\begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array}\right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a *P* y es perpendicular a *r*.

b) Calcula la distancia de *P* a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{array}\right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u}=(-1,-1,1)$.

Todos los planos perpendiculares a *r* tienen de ecuación: $-x-y+z+D=0$. Como queremos que pase por el punto *P*:

$$-x-y+z+D=0 \Rightarrow -2+2+0+D=0 \Rightarrow D=0$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x-y+z=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-x-y+z=0 \Rightarrow -2+t-1+t+t=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto de corte es: $M=(2-1,1-1,1)=(1,0,1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une *P* y el punto *M*, es decir:

$$\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(1)^2}=\sqrt{6}\ u$$

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.
a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
c) Calcula el área del triángulo *ABC*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto $A=(-3,4,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}=(6,2,3)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-2,1)$. Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x-2z+3=0$$

b) La recta viene definida por el punto $(0,0,0)$ y su vector director será el vector normal del plano $\vec{u}=(1,0,-2)$. Luego su ecuación será: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo $S=\dfrac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \right|$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=8\vec{i}-16\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{64+0+256}=\frac{\sqrt{320}}{2}u^2$$

Considera el punto $A(8,-1,3)$ y la recta *r* dada por $\dfrac{x+1}{2}=y-2=\dfrac{z-1}{3}$.
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y es perpendicular a *r*.
b) Halla el punto simétrico de *A* respecto de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r\equiv\begin{cases}x=-1+2t\\ y=2+t\\ z=1+3t\end{cases}$. El vector director de la recta $(2,1,3)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x+y+3z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(8,-1,3)$.

$$2x+y+3z+D=0\Rightarrow 2\cdot 8-1+3\cdot 3+D=0\Rightarrow D=-24$$

Luego, el plano que nos piden es: $2x+y+3z-24=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x+y+3z-24=0\Rightarrow 2\cdot(-1+2t)+(2+t)+3\cdot(1+3t)-24=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(-1+3,2+\dfrac{3}{2},1+\dfrac{9}{2}\right)=\left(2,\dfrac{7}{2},\dfrac{11}{2}\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(8,-1,3)+(a,b,c)}{2}=\left(2,\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)\Rightarrow P'=(-4,8,8)$$

Sea *r* la recta definida por $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **y *s* la recta dada por** $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$**.**

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1-2s \\ y = s \\ z = 1-2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (1+t, 1+t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1-2s, s, 1-2s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)\cdot(1,1,1) = 0 \Rightarrow 3t+3s = 0$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)\cdot(-2,1,-2) = 0 \Rightarrow 3-3t-9s = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = -\dfrac{1}{2}$; $s = \dfrac{1}{2}$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \ ; \ B = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $\vec{AB} = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{0} = \frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$

$$d = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ u$$

Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta *r* de ecuación $\dfrac{x-5}{-2}=y=\dfrac{z-6}{-3}$

a) Halla la posición relativa de π y *r*.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a *r* y es perpendicular a π .
c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta *r* a implícitas $\dfrac{x-5}{-2}=y=\dfrac{z-6}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{cases}$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=\ \ 5 \\ -3x+2z=-3 \end{array}\right\}$

Como $R(A)=2$ y $R(M)=3$, la recta es paralela al plano

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta *r* es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k,2,2k)$ y el vector normal del plano π $(2,1,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1-3k,2,2k)\cdot(2,1,-1)=0 \Rightarrow 2-6k+2-2k=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $-x+4y+2z-7=0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta *r* es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k,2,2k)$ y el vector normal del plano π $(2,1,-1)$, tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1-3k}{2}=\frac{2}{1}=\frac{2k}{-1} \Rightarrow k=-1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $2x+y-z-4=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=4-2t+s \\ z=s \end{array}\right\}$

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta *r* dada por $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a *r* y es paralelo a la recta que pasa por *A* y por *B*.

b) Halla el punto de la recta *r* que está a la misma distancia de *A* y de *B*.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por el punto $(1,0,1)$ de la recta, el vector director de la recta $\vec{u} = (2,1,0)$ y el vector $\vec{AB} = (0,-2,-4)$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+2y-z+2=0$$

b) Calculamos los vectores:

$$\vec{AC} = (1+2t-1, t-1, 1-2) = (2t, t-1, -1) \; ; \; \vec{BC} = (1+2t-1, t+1, 1+2) = (2t, t+1, 3)$$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\left| \vec{AC} \right| = \left| \vec{BC} \right| \Rightarrow \sqrt{4t^2+(t-1)^2+1} = \sqrt{4t^2+(t+1)^2+9} \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto *C* es: $C = (1+2t, t, 1) = (-3,-2,1)$

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.
a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta *r*.
b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a *r*: $x - y + 4z + D = 0$.

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $(0,0,0)$, luego:

$$x - y + 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 4 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x - y + 4z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$x - y + 4z = 0 \Rightarrow 1 + t + t + 4(-1+4t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1+\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1+\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une el origen de coordenadas y el punto *M*, es decir:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ u$$

b) La ecuación de la recta que pasa por *O* y *M* es: $\dfrac{x}{\frac{7}{6}} = \dfrac{y}{-\frac{1}{6}} = \dfrac{z}{-\frac{2}{6}}$