PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2003

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=(x+3)\cdot e^{-x}$.
a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Determina los extremos relativos de *f* y los puntos de inflexión de su gráfica.
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: No tiene.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0\Rightarrow y=0$.

Asíntota oblicua: No tiene

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\frac{1\cdot e^x-e^x(x+3)}{(e^x)^2}=\frac{-x-2}{e^x}=0\Rightarrow x=-2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$
Signo y'	+	–
Función	C	D

$\downarrow$

Máximo $(-2,e^2)$

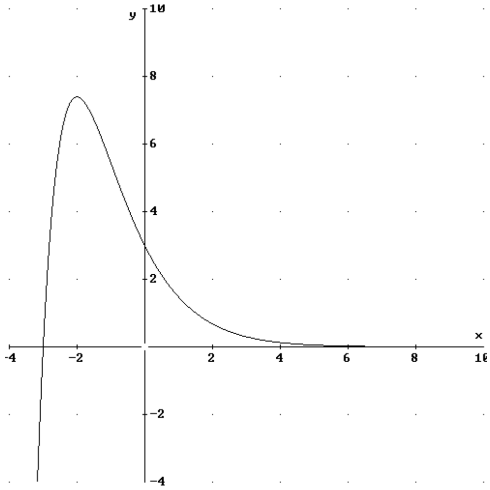
Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $y''=\frac{-1\cdot e^x-e^x(-x-2)}{(e^x)^2}=\frac{x+1}{e^x}=0\Rightarrow x=-1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo y'	–	+
Función	Cn	Cx

$\downarrow$

P.I. $(-1,2e)$

c)



De entre todos los rectángulos que tienen uno de sus vértices en el origen de coordenadas, el opuesto de este vértice en la curva $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ $(x>1)$, uno de sus lados situado sobre el semieje positivo de abscisas y el otro sobre el semieje positivo de ordenadas, halla el que tiene área mínima.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función que queremos que sea mínimo es: $Superficie_{\min} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$Superficie_{\min} = x \cdot \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{2x^3}{x^2-1}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{2x^4-6x^2}{(x^2-1)^2} = 0 \Rightarrow x=\sqrt{3}$$

Luego, las dimensiones son: $x=\sqrt{3}$; $y=3$

Dada la función *f* definida para $x \neq -1$ por $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los puntos de corte, si existen, de dicha gráfica con sus asíntotas.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical: $x = -1$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+2x+1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{2x+2} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x}{2} = \infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y = x - 2$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^3}{x^2+2x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+2x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3}{x^2+2x+1} - x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2+2x+1} \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{-2x^2 - x}{x^2+2x+1} \right] = -2$$

b) Calculamos el punto de corte de la asíntota oblicua con la función.

$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+1} \\ y = x-2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^3}{x^2+2x+1} = x - 2 \Rightarrow \left(-\frac{2}{3}, -\frac{8}{3} \right)$$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un punto de derivada nula en $x=1$ que no es extremo relativo y que $f(1)=1$. Calcula *a*, *b*, y *c*.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Si no es extremo relativo, será un punto de inflexión, luego: $f''(1)=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1\Rightarrow 1+a+b+c=1 \\ f'(1)=0\Rightarrow 3+2a+b=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6+2a=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-3\ ;\ b=3\ ;\ c=0$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función continua definida por $f(x)=\begin{cases} |2-x| & si \;\; x<a \\ x^2-5x+7 & si \;\; x\geq a \end{cases}$ donde *a* es un número real.
a) Determina *a*.
b) Halla la función derivada de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es abrir la función

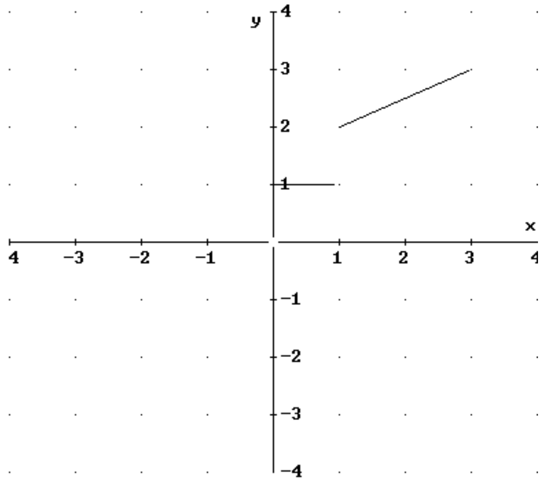
$$f(x)=\begin{cases} |2-x| & si \;\; x<a \\ x^2-5x+7 & si \;\; x\geq a \end{cases} = \begin{cases} 2-x & si \;\; x<2 \\ x-2 & si \;\; 2\leq x<a \\ x^2-5x+7 & si \;\; x\geq a \end{cases}$$

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en $x=a$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} x-2=a-2 \\ \lim\limits_{x\to a^+} x^2-5x+7=a^2-5a+7 \end{array}\right\} \Rightarrow a-2=a^2-5a+7 \Rightarrow a^2-6a+9=0 \Rightarrow a=3$$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \;\; x<2 \\ 1 & si \;\; 2<x<3 \\ 2x-5 & si \;\; x\geq 3 \end{cases}$

En la figura adjunta puedes ver representada parte de la gráfica de una función *f* que está definida en el intervalo $(-3,3)$ y que es simétrica respecto al origen de coordenadas.



a) Razona cuál debe ser el valor de $f(0)$.

b) Completa la gráfica de *f*.

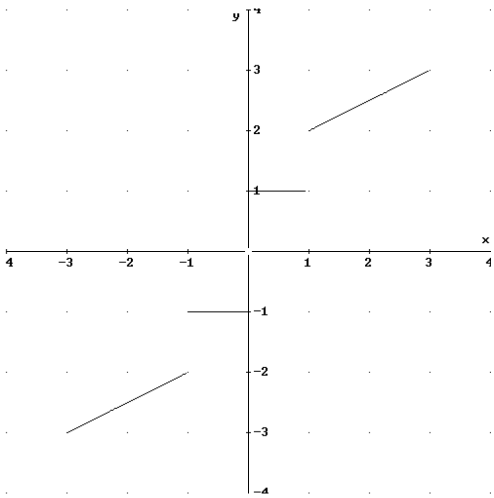
c) Halla $f'(x)$ para los $x \in (-3,3)$ en los que dicha derivada exista.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La única posibilidad para que la función sea simétrica respecto al origen de coordenadas es que $f(0)=0$.

b)



c) Como la función no es continua en $x=-1$; $x=0$; $x=1$, tampoco es derivable en dichos puntos.

La función derivada será: $f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad -3<x<-1 \\ 0 & si \quad -1<x<0 \\ 0 & si \quad 0<x<1 \\ \frac{1}{2} & si \quad 1<x<3 \end{cases}$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ es tal que $f(0)=4$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en $(1,2)$. Conociendo además que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0 es horizontal, calcula *a*, *b*, *c* y *d*.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \ ; \ f'(x)=3ax^2+2bx+c \ ; \ f''(x)=6ax+2b$$

A continuación, aplicamos las condiciones del problema.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=4\Rightarrow d=4 \\ f(1)=2\Rightarrow a+b+c+d=2 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a+2b=0 \\ f'(0)=0\Rightarrow c=0 \end{array}\right\}\Rightarrow a=1 \ ; \ b=-3 \ ; \ c=0 \ ; \ d=4$$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & si \quad x\le 1 \\ 2-x^2 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcula, si es posible, las derivadas laterales de f en $x=1$.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a estudiar primero la continuidad en $x=1$.

1) $f(1)=4$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} x^2+3=4 \\ \lim_{x\to 1^+} 2-x^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} \neq \lim_{x\to 1^+} \Rightarrow$ No es continua.

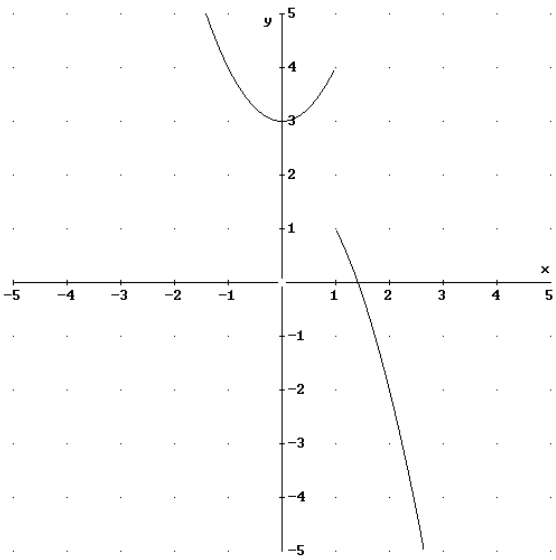
Como $f(1)=\lim_{x\to 1^-} \Rightarrow$ La función es continua en $x=1^-$.

Como $f(1)\neq \lim_{x\to 1^+} \Rightarrow$ La función no es continua en $x=1^+$ y, por lo tanto, no puede ser derivable en $x=1^+$.

La derivada a la izquierda de $x=1$ es $f'(1^-)=2$. La función derivada es: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x\le 1 \\ -2x & si \quad x>1 \end{cases}$

b) Igualamos a cero la primera derivada: $y'=0\Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	–	+	
Función	D	C	D



Considera la función *f* definida para $x \neq -2$ por $f(x)=\dfrac{2x^2+2}{x+2}$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Estudia la posición relativa de la gráfica de *f* respecto de sus asíntotas.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Asíntota vertical es $x=-2$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+2}{x+2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x}{1}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

Asíntota oblicua: $y=2x-4$

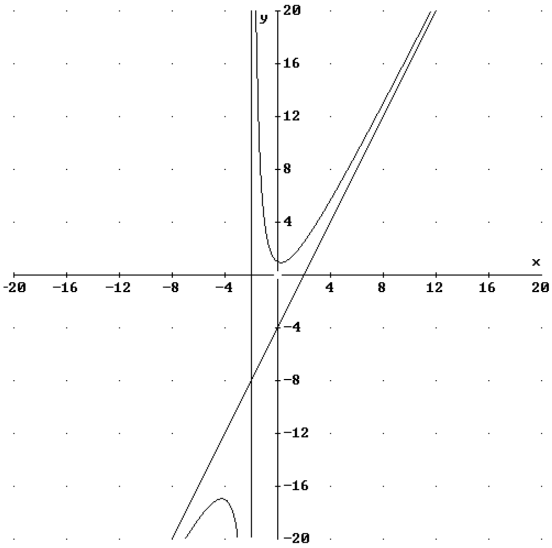
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2}{x^2+2x}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+2}{x+2}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+2-2x^2-4x}{x+2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-4x+2}{x+2}\right]=-4$$

b) Calculamos la posición de la gráfica respecto de las asíntotas:

$\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2+2}{x+2}-(2x-4)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x^2+2-2x^2+4x-4x+8}{x+2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{10}{x+2}\right]=0^+$ luego, $f(x)$ está por encima de la asíntota oblicua.

$\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2+2}{x+2}-(2x-4)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2x^2+2-2x^2+4x-4x+8}{x+2}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{10}{x+2}\right]=0^-$ luego, $f(x)$ está por debajo de la asíntota oblicua.



Calcula $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Ln(1+x)-senx}{x\cdot senx}$

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)-senx}{x\cdot senx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\cos x}{senx+x\cos x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}+senx}{\cos+\cos x-xsenx}=-\frac{1}{2}$$

Estudia la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-|x|} & si\ \ x\neq -1\ \ y\ \ x\neq 1\\ 0 & si\ \ x=-1\ \ ó\ \ x=1\end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Lo primero que hacemos es abrir la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-|x|} & si\ \ x\neq -1\ \ y\ \ x\neq 1\\ 0 & si\ \ x=-1\ \ ó\ \ x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{x}{1+x} & si\ \ x<0\ \ y\ \ x\neq -1\\ \dfrac{x}{1-x} & si\ \ x>0\ \ y\ \ x\neq 1\\ 0 & si\ \ x=-1\ \ ó\ \ x=1\end{cases}$$

A continuación vamos a estudiar la continuidad en $x=0$; $x=1$ y $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{1+x}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1-x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=0\Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{1-x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{1-x}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow \text{No continua en } x=1 \text{ y, por lo tanto, no derivable.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x}{1+x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x}{1+x}=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x)\Rightarrow \text{No continua en } x=-1 \text{ y, por lo tanto, no derivable.}$$

Vamos a estudiar ahora si es derivable en $x=0$. $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+x)^2} & si\ \ x<0\ \ y\ \ x\neq -1\\ \dfrac{1}{(1-x)^2} & si\ \ x>0\ \ y\ \ x\neq 1\\ 0 & si\ \ x=-1\ \ ó\ \ x=1\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=1\\ f'(0^+)=1\end{array}\right\}\Rightarrow \text{Si es derivable.}$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.