PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Determina un punto de la curva de ecuación $y = x \cdot e^{-x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$y' = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$$

$$y'' = -2x \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2) + (-4x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (4x^3 - 6x)$$

Igualando a cero la segunda derivada, obtenemos:

$$y'' = 0 \Rightarrow e^{-x^2} \cdot (4x^3 - 6x) = 0 \Rightarrow (4x^3 - 6x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

De los tres posibles puntos de inflexión, el de pendiente máxima es el (0,0), ya que:

$$m = y'(x = 0) = 1$$
$$m = y'\left(x = \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -2 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$$
$$m = y'\left(x = -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -2 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$, para $x\neq 0$.

a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
c) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de *f*.
d) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}-\{0\}$. La función no corta a ninguno de los dos ejes.

Asíntotas Verticales: La recta $x=0$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{3x^4-3}{x^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$

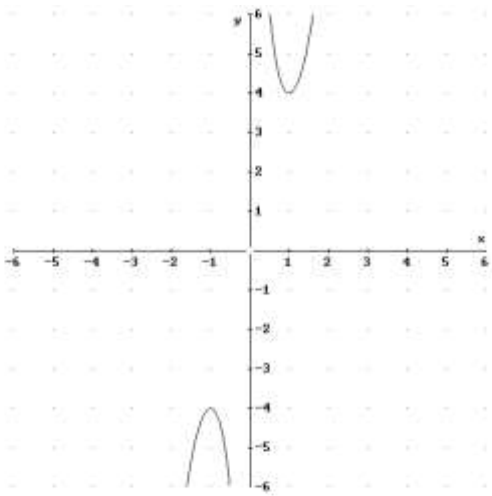
	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	–	–	+
Función	C	D	D	C

$\downarrow$ Máximo$(-1,-4)$ $\quad\downarrow$ No existe $\quad\downarrow$ mínimo$(1,4)$

c) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $y''=\dfrac{6x^4+6}{x^3}$; $y''=0\Rightarrow NO$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	–	+
Función	Cn	Cx

d)



Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(x^2+1)$, siendo Ln la función logaritmo neperiano.
a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función *f* (puntos donde se alcanzan y valor de la función).
b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de inflexión de abscisa negativa.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}=0\Rightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	$-$	+
Función	D	C

$\downarrow$
mínimo (0,0)

b) Los posibles puntos de inflexión son las soluciones de $f''(x)=0$.

$$f''(x)=\frac{2\cdot(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=\pm 1$$

Nos están pidiendo la recta tangente en $x=-1$. Su ecuación será:

$$y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)\Rightarrow y-\ln 2=-1\cdot(x+1)\Rightarrow y=-x-1+\ln 2$$

Calcula $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{Ln\, x}-\frac{1}{x-1}\right)$ siendo Ln la función logaritmo neperiano.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\cdot \ln x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{1\cdot \ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\cdot \ln x+(x-1)}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\cdot \ln x+(x-1)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1\cdot \ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{2}$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

a) Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función *f*.

c) Esboza la gráfica de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 2 EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}$

Asíntotas Verticales: No tiene.

Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \Rightarrow y = 1$

Asíntota Oblicua: No tiene ya que posee asíntota horizontal.

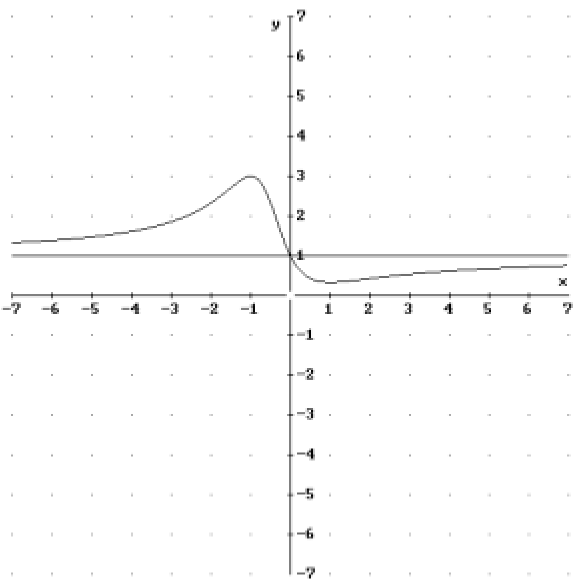
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y' = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \ y \ -1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y'	+	$-$	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $(-1, 3)$ mínimo $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$

c)



Sea $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\dfrac{x(Ln\,x)^2}{(x-1)^2}$, siendo Ln la función logaritmo neperiano. Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función.
En caso de que exista, hállala.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot(\ln x)^2+2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x}{2\cdot(x-1)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x}}{2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x+1)}{2x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{x}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

Luego, la recta $y=0$ es la asíntota horizontal.

Se sabe que la función $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+bx^2 & si \quad 0\le x<2 \\ -4+\sqrt{x-1} & si \quad 2\le x\le 5\end{cases}$

es derivable en el intervalo $(0,5)$.

a) Calcula las constantes *a* y *b*.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 2.

MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} ax+bx^2=2a+4b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} -4+\sqrt{x-1}=-3\end{array}\right\}\Rightarrow 2a+4b=-3$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases} a+2bx & si \quad 0<x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & si \quad 2<x\le 5\end{cases}$

Como es derivable se cumple que: $f'(2^-)=f'(2^+)\Rightarrow a+4b=\dfrac{1}{2}$

Resolviendo el sistema: $\left.\begin{array}{r}2a+4b=-3 \\ a+4b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow a=-\dfrac{7}{2}\ ;\ b=1$

b) La ecuación de la recta tangente en *x* = 2 es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f(2)=-3$$
$$f'(2)=\frac{1}{2}$$

Luego la recta tangente en *x* = 2 es $y+3=\dfrac{1}{2}\cdot(x-2)\Rightarrow x-2y-8=0$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$
a) Determina $a, b \in \mathbb{R}$ sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(2,2)$ y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$.
b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de inflexión.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera y segunda derivada de $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \ ; \ f''(x) = 6x + 2a$$

Pasa por (2,2), nos dice que $f(2) = 2 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + 1 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = -7$

Punto de inflexión en x = 0, nos dice que $f''(0) = 0 \Rightarrow 2a = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 4a + 2b &= -7 \\ 2a &= \ \ 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 0 \ ; \ b = -\frac{7}{2}$$

La función es $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x + 1$

b) El punto de inflexión tiene de abscisa x = 0 , luego la ecuación de la recta tangente en x = 0 es

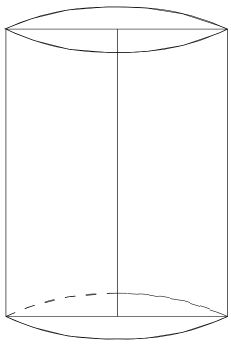
$$y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{7}{2}(x - 0) \Rightarrow 7x + 2y - 2 = 0$$

La ecuación de la recta normal en x = 0 es

$$y - f(0) = -\frac{1}{f'(0)} \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = \frac{2}{7}(x - 0) \Rightarrow 2x - 7y + 7 = 0$$

Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.
MATEMÁTICAS II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $V=\pi r^2 h$

b) Relación entre las variables: $200=2\pi r^2+2\pi r h \Rightarrow h=\dfrac{200-2\pi r^2}{2\pi r}=\dfrac{100-\pi r^2}{\pi r}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\cdot\frac{100-\pi r^2}{\pi r}=100r-\pi r^3$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V'=100-3\pi r^2=0\Rightarrow r=\pm\sqrt{\frac{100}{3\pi}}$$

Solo vale la solución positive ya que estamos calculando dimensiones, luego:

$$r=\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\ cm\ ;\ h=2\cdot\sqrt{\frac{100}{3\pi}}\ cm$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$
a) Estudia la derivabilidad de *f*.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
c) Calcula los extremos relativos de *f* (puntos donde se alcanzan y valor de la función).
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & si \quad x < 0 \\ x^2 - x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Las funciones $x^2 + x$ y $x^2 - x$ por ser polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. En el único punto donde puede haber problemas es en $x = 0$, que es el punto donde cambiamos de una a otra.
Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 0$
Veamos la continuidad de *f(x)* en $x = 0$:

1) $f(0) = 0$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

3) $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Por lo tanto, la función es continua en $x = 0$

Estudiamos ya la derivabilidad de *f(x)*, en particular en $x = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & si \quad x < 0 \\ 2x - 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = \ \ 1 \\ f'(0^+) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable}$$

b y c) Igualamos a cero la primera derivada:

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

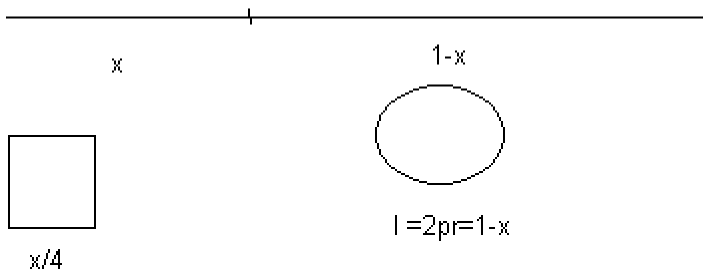
	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$
Signo y'	–	+	–	+
Función	D	C	D	C

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

m $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ Pico $(0,0)$ m $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



El área del cuadrado es $S_1 = \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16}$

La longitud de la circunferencia es $L = 2\pi r = 1 - x$, de donde $r = \dfrac{1-x}{2\pi}$, y por tanto el área del círculo es $S_2 = \pi r^2 = \pi\left(\dfrac{1-x}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{(1-x)^2}{4\pi}$

La función a optimizar es la suma de las áreas: $S(x) = S_1 + S_2 = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(1-x)^2}{4\pi}$

Calculamos la 1ª derivada $S'(x)$ y la igualamos a 0.

$$S'(x) = \frac{2x}{16} - \frac{2(1-x)}{4\pi} = \frac{8\pi x - 32 + 32x}{64\pi} = \frac{(\pi+4)x - 4}{8\pi} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{\pi+4}$$

Calculamos la 2ª derivada $S''(x)$ para comprobar que es un mínimo.

$$S''(x) = \frac{\pi+4}{8\pi} > 0 \Rightarrow mínimo$$

Los trozos en que se ha dividido el alambre tienen de longitud $x = \dfrac{4}{\pi+4}$ y $1 - x = 1 - \dfrac{4}{\pi+4} = \dfrac{\pi}{\pi+4}$, para que las sumas de las áreas sea mínima.

Halla la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=12x-6$ y que la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ tiene de ecuación $4x-y-7=0$.
MATEMÁTICAS II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como $f''(x)=12x-6$, es una función de primer grado, la función $f(x)$ debe ser de tercer grado, es decir, $f(x)=ax^2+bx^2+cx+d$. Calculamos la segunda derivada e igualamos a la que nos dan.

$$f''(x)=12x-6=6ax+2b\Rightarrow a=2\,;b=-3$$

Como la recta $y=4x-7$ es la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$, entonces se cumple que:

$$f'(2)=4\Rightarrow 12a+4b+c=4\Rightarrow 24-12+c=4\Rightarrow c=-8$$

Además como $y=4x-7$ es la recta tangente a $f(x)$ en $x=2$, entonces en $x=2$ coinciden la ordenada de la función y la de la recta tangente, es decir:

$$f(2)=y(2)\Rightarrow 8a+4b+2c+d=1\Rightarrow 16-12-16+d=1\Rightarrow d=13$$

Por lo tanto, la función que nos piden es: $f(x)=2x^2-3x^2-8x+13$