PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2008

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sea *f* la función definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$. Determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = 0\cdot\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty \Rightarrow \text{Asíntota vertical para } x\to 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \text{No tiene asíntota vertical para } x\to 0^-$$

Asíntota horizontal: No tiene

$$\lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty\cdot 1 = \infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota Horizontal para } x\to +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty\cdot 1 = -\infty \Rightarrow \text{No tiene asíntota Horizontal para } x\to -\infty$$

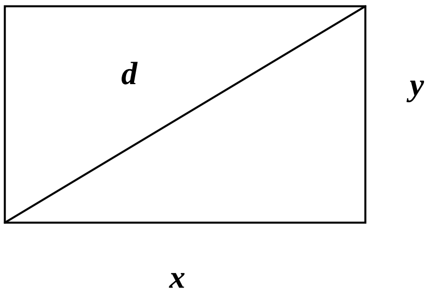
Asíntota oblicua: $y = x + 1$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

De entre todos los rectángulos de perímetro 8 cm, determina las dimensiones del que tiene diagonal de menor longitud.
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo: $d_{\min} = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Relación entre las variables: $2x + 2y = 8 \Rightarrow y = 4 - x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$d_{\min} = \sqrt{x^2 + (4-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 8x + 16}$$

d) Derivamos e igualamos a cero:

$$d'_{\min} = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2 - 8x + 16}} = 0 \Rightarrow x = 2$$

Luego, es un cuadrado de lado $x = 2$; $y = 2$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2+ax+b \quad y \quad g(x)=c\,e^{-(x+1)}$$

Se sabe que las gráficas de *f* y *g* se cortan en el punto $(-1,2)$ y tienen en ese punto la misma recta tangente.
a) Calcula los valores de *a*, *b* y *c*.
b) Halla la ecuación de dicha recta tangente.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 1.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como se corta en el punto $(-1,2)\Rightarrow f(-1)=g(-1)=2$

$$f(-1)=g(-1)=2\Rightarrow\begin{cases}a+b+1=2\\ c\,e^0=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=1\\ c=2\end{cases}$$

Como en ese punto tienen la misma recta tangente $\Rightarrow f'(-1)=g'(-1)$

$$f'(-1)=g'(-1)\Rightarrow -2+a=-c\,e^0\Rightarrow a=0$$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a=0$; $b=1$; $c=2$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=-1$ es: $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

- $f(-1)=2$
- $f'(-1)=-2$

Luego, la recta tangente es: $y-2=-2\cdot(x+1)\Rightarrow y=-2x$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{x+1}{e^{x}}$, determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en su punto de inflexión.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el punto de inflexión.

$$f'(x)=-\frac{x}{e^{x}}\ ;\ f''(x)=\frac{x-1}{e^{x}}=0\Rightarrow x=1$$

Nos están pidiendo la recta tangente en $x=1$. Su ecuación será:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-\frac{2}{e}=-\frac{1}{e}\cdot(x-1)\Rightarrow y=\frac{-x+3}{e}$$

Sea la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ \ 0\le x<2 \\ cx+1 & si\ \ 2\le x\le 4\end{cases}$.

a) Determina *a, b* y *c* sabiendo que *f* es continua en el intervalo cerrado $[0,4]$, derivable en el intervalo abierto $(0,4)$ y que $f(0)=f(4)$.

b) ¿En qué punto del intervalo se anula la derivada de la función?.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Aplicamos las tres condiciones del problema.

1. Como la función es continua en $x=2$, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} x^2+ax+b=4+2a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} cx+1=2c+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4+2a+b=2c+1 \Rightarrow 2a+b-2c=-3$$

2. Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad 0<x<2 \\ c & si \quad 2<x<4\end{cases}$

Como la función es derivable en $x=2$, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4+a \\ f'(2^+)=c \end{array}\right\} \Rightarrow 4+a=c \Rightarrow a-c=-4$$

3. $f(0)=f(4) \Rightarrow b=4c+1 \Rightarrow b-4c=1$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2a+b-2c=-3 \\ a-c=-4 \\ b-4c=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-3\ ;\ b=5\ ;\ c=1$$

b) Veamos en que punto se anula la derivada

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & si \quad 0<x<2 \\ 1 & si \quad 2<x<4\end{cases} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Sea $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^x(sen\,x+\cos x)$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Calcula los puntos de inflexión de la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=e^x(sen\,x+\cos x)+(\cos x-sen\,x)\cdot e^x=2e^x\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\ ;\ x=\frac{3\pi}{2}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$
Signo f'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ mínimo $\left(\frac{3\pi}{2},-e^{\frac{\pi}{2}}\right)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x)=2e^x(\cos x-sen\,x)=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}\ ;\ x=\frac{5\pi}{4}$$

	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right)$
Signo f''	+	–	+
Función	Cx	Cn	Cx

$\downarrow$ $\downarrow$

P.I. $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}}\right)$ P.I. $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\,e^{\frac{5\pi}{4}}\right)$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = (3-4x)e^x + (3x-2x^2)\cdot e^x = e^x(-2x^2 - x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1 \; ; \; x = -\frac{3}{2}$$

	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$	$(1, \infty)$
Signo f'	$-$	$+$	$-$
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$

mínimo $\left(-\frac{3}{2}, -9e^{-\frac{3}{2}}\right)$ Máximo $(1, e)$

Dada la función *f* definida, para $x \neq 0$, por $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ determina las asíntotas de su gráfica.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el dominio de la función.

$$e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asíntota vertical: $x = 0$.

Asíntota horizontal: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \Rightarrow y = 1$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{e^{-\infty} + 1}{e^{-\infty} - 1} = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow y = -1$$

Asíntota oblicua: No tiene, ya que tiene asíntota horizontal.

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & si \quad x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Halla *a* y *b* sabiendo que *f* es derivable en $\mathbb{R}$.
b) Determina la recta tangente y la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 3$.
MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x = 2$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} ax^2 + 3x = 4a + 6 \\ \lim_{x \to 2^+} x^2 - bx - 4 = 4 - 2b - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 6 = -2b \Rightarrow 2a + b = -3$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & si \quad x \le 2 \\ 2x - b & si \quad x > 2 \end{cases}$

Como es derivable en $x = 2$, se cumple que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\} \Rightarrow 4a + 3 = 4 - b \Rightarrow 4a + b = 1$$

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} 2a + b = -3 \\ 4a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2 \; ; \; b = -7$

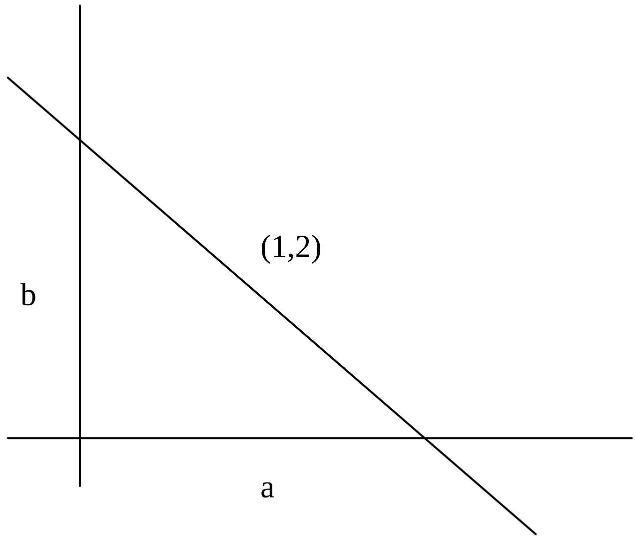
b) El punto es $(3, 26)$ y la pendiente de la recta tangente es $m = 13$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 26 = 13 \cdot (x - 3)$

La ecuación de la recta normal es: $y - 26 = -\frac{1}{13} \cdot (x - 3)$

De entre todas las rectas del plano que pasan por el punto $(1,2)$, encuentra aquella que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Halla el área de dicho triángulo.
MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima es: $S = \dfrac{a \cdot b}{2}$

b) Relación entre las variables: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{b}{2-b}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S = \frac{-\dfrac{b}{2-b} \cdot b}{2} = -\frac{b^2}{4-2b}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = \frac{-2b(4-2b)-(-2)(-b^2)}{(4-2b)^2} = \frac{-8b+4b^2-2b^2}{(4-2b)^2} = \frac{2b^2-8b}{(4-2b)^2} = 0 \Rightarrow b = 0 \ ; \ b = 4$$

$$a = -\frac{b}{2-b} = -\frac{4}{2-4} = 2$$

Luego, la ecuación de la recta es: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} = 1 \Rightarrow 4x + 2y = 8 \Rightarrow 2x + y = 4$.

El área del triángulo es: $S = \dfrac{a \cdot b}{2} = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4 \ u^2$