PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2014

MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

a) Halla *a, b* y *c* para que la gráfica de *f* tenga un punto de inflexión de abscisa $x=\frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x=0$ tenga por ecuación $y=5-6x$.

b) Para $a=3$, $b=-9$ y $c=8$, calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b\ ;\ f''(x)=6x+2a$$

- Punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}\Rightarrow f''\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow 6\cdot\frac{1}{2}+2a=0\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$

- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$ tiene de pendiente -6

$$\Rightarrow f'(0)=-6\Rightarrow 3\cdot 0^2+2a\cdot 0+b=-6\Rightarrow b=-6$$

- La función pasa por el punto $(0,5)\Rightarrow f(0)=5\Rightarrow c=5$

b) Calculamos los máximos y los mínimos de la función: $f(x)=x^3+3x^2-9x+8$

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$f'(x)=3x^2+6x-9=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-3$$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,1)$	$(1,+\infty)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

Creciente: $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$

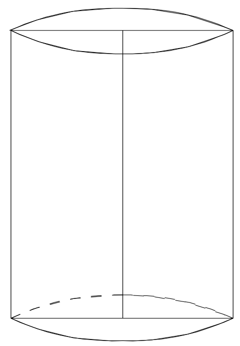
Decreciente: $(-3,1)$

Máximo: $(-3,35)$

Mínimo: $(1,3)$

Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínimo es: $S_{\min} = \pi r^2 + 2\pi r h$

b) Relación entre las variables: $V = \pi r^2 h = 125 \Rightarrow h = \dfrac{125}{\pi r^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\min} = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \frac{125}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{250}{r}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\min} = 2\pi r - \frac{250}{r^2} = \frac{2\pi r^3 - 250}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{2\pi}} = 3'41\ m$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo:

$$S''_{\min} = \frac{6\pi r^2 \cdot r^2 - 2r(2\pi r^3 - 250)}{r^4} = \frac{2\pi r^3 + 500r}{r^3}$$

$$S''(r = 3'41) = \frac{2\pi(3'41)^3 + 500(3'41)}{(3'41)^3} > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $r = 3'41\ m$ y $h = \dfrac{125}{\pi(3'41)^2} = 3'41\ m$

Sabiendo que $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)$ es finito, calcula *a* y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{a}{\ln x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x\ln x-ax+a}{(x-1)\ln x}\right)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-a}{\ln x+(x-1)\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-a}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\frac{1-a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1-a=0\Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x-1\cdot(x-1)}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & si \quad x<0\\ ax+b & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Calcula *a* y *b*.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-1$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función es derivable, luego, tiene que ser continua.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}ax+b=b\end{array}\right\}\Rightarrow b=1$$

Calculamos $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(e^x+e^{-x})\cdot 2x-2(e^x-e^{-x})}{4x^2} & si \quad x<0\\ a & si \quad x\geq 0\end{cases}$

Calculamos $f'(0^-)$ aplicando L'Hôpital:

$$f'(0^-)=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(e^x+e^{-x})\cdot 2x-2(e^x-e^{-x})}{4x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x(2x-2)+e^{-x}(2x+2)}{4x^2}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x(2x-2)+2e^x-e^{-x}(2x+2)+2e^{-x}}{8x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2xe^x-2xe^{-x}}{8x}=\frac{0}{0}=$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2e^x+2xe^x-2e^{-x}+2e^{-x}}{8}=\frac{0}{8}=0$$

Calculamos $f'(0^+)$: $f'(0^+)=a$

Como es derivable se cumple que: $f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow a=0$

b) La ecuación de la recta tangente en $x=-1$ es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$$f(-1)=\frac{e^{-1}-e}{-2}=\frac{e^2-1}{2e}$$

$$f'(-1)=\frac{(e^{-1}+e)\cdot(-2)-(e^{-1}-e)\cdot 2}{4}=-e^{-1}=-\frac{1}{e}$$

Luego la recta tangente en $x=-1$ es $y-\dfrac{e^2-1}{2e}=-\dfrac{1}{e}\cdot(x+1)\Rightarrow y=-\dfrac{1}{e}\cdot(x+1)+\dfrac{e^2-1}{2e}$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\ln x$ para $x>0$

a) Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la pendiente de la recta tangente es máxima

b) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es máxima en el punto de inflexión. Luego vamos a calcular los puntos de inflexión de esta función.

$$y'=\frac{-2}{4x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x}$$

$$y''=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$$

El valor $x=0$ no está en el dominio, por lo tanto, sólo sirve el valor $x=1$, es decir, el punto que nos piden es: $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

b) La ecuación de la recta normal en el punto $x=1$, es: $y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

Sustituyendo los valores de $f(1)=\dfrac{1}{2}$ y $f'(1)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$, tenemos:

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}(x-1)\Rightarrow y-\frac{1}{2}=-2x+2\Rightarrow 4x+2y-5=0$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Halla *b, c* y *d* sabiendo que *f* tiene un máximo relativo en $x=-1$ y que $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=3x^2+2bx+c$

- Máximo relativo en $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow 3\cdot(-1)^2+2b(-1)+c=0\Rightarrow -2b+c=-3$

- $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1}=\frac{1+b+c+d}{0}$

Como nos dicen que el límite existe y vale 4, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $1+b+c+d=0$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^3+bx^2+cx+d}{x-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2bx+c}{1}=3+2b+c=4$$

Resolvemos el sistema formado por las tres ecuaciones que hemos obtenido:

$$\left.\begin{array}{r} -2b+c=-3 \\ b+c+d=-1 \\ 2b+c=\ \ 1 \end{array}\right\}\Rightarrow b=1\ ;\ c=-1\ ;\ d=-1$$

Luego, la función es: $f(x)=x^3+x^2-x-1$

Calcula $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan\ x - sen\, x}{x - sen\, x}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - senx}{x - sen\, x} = \dfrac{0}{0}$, le aplicamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - senx}{x - sen\, x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{3\cos^2 x \cdot sen\, x}{-2\cos x \cdot sen\, x + 3\cos^2 x \cdot sen\, x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\cos^2 x}{-2\cos x + 3\cos^2 x} = \frac{3}{-2+3} = 3$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$
a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
c) Esboza la gráfica de *f*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$, no tiene asíntota vertical ya que su dominio es $\mathbb{R}$ **.**

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}=\frac{2}{\infty}=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

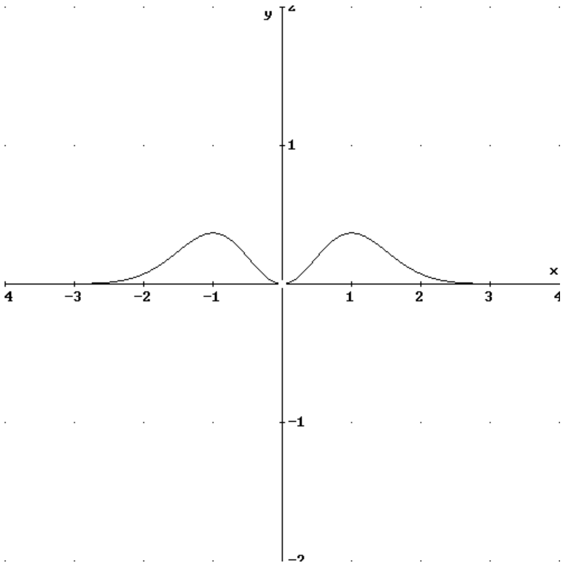
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{2x\cdot e^{x^2}-2x\cdot e^{x^2}\cdot x^2}{(e^{x^2})^2}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Signo y'	+	—	+	—
Función	C	D	C	D

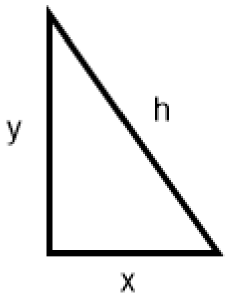
$\downarrow$ Máximo $\left(-1,\frac{1}{e}\right)$ $\quad\downarrow$ mínimo $(0,0)$ $\quad\downarrow$ Máximo $\left(1,\frac{1}{e}\right)$

c)



De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $h=\sqrt{x^2+y^2}$.

b) Relación entre las variables: $8=\dfrac{x\cdot y}{2}\Rightarrow y=\dfrac{16}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$h=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^4+256}{x^2}}$$

d) Derivamos e igualamos a cero: $h'=\dfrac{\dfrac{4x^3\cdot x^2-2x(x^4+256)}{x^4}}{2\sqrt{\dfrac{x^4+256}{x^2}}}=\dfrac{x^4-256}{x^2\sqrt{x^4+256}}=0\Rightarrow x=\pm 4$

Como es una longitud tomamos el valor positivo $x=4$

e) Calculamos la segunda derivada para ver que valor corresponde al máximo.

$$h''=\frac{4x^3\cdot\left(x^2\sqrt{x^4+256}\right)-\left(2x\cdot\sqrt{x^4+256}+x^2\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+256}}\right)\cdot(x^4-256)}{x^4(x^4+256)}$$

$$h''(x=4)=\frac{256\cdot\left(16\sqrt{512}\right)-\left(8\cdot\sqrt{512}+\dfrac{4096}{2\sqrt{512}}\right)\cdot 0}{256\cdot 512}>0\Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones de los catetos son: $x=4\ cm$; $y=4\ cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función derivable definida por: $f(x)=\begin{cases} a-x & si\ \ x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}+\ln x & si\ \ x>1 \end{cases}$ donde ln denota el logaritmo neperiano

a) Calcula a y b.

b) Para $a=3$ y $b=2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0,e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan)

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la función es derivable en $x=1$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} a-x=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{b}{x}+\ln x=b \end{array}\right\} \Rightarrow a-1=b\Rightarrow a-b=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -1 & si\quad x\le 1 \\ -\dfrac{b}{x^2}+\dfrac{1}{x} & si\quad x>1 \end{cases}$

Como es derivable en $x=1$, se cumple que: $\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-1 \\ f'(1^+)=-b+1 \end{array}\right\}\Rightarrow -1=-b+1\Rightarrow b=2$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $a-b=1\Rightarrow a=1+2=3$

b) Como es derivable, los extremos absolutos se encuentran en $x=0$, $x=e$ y en los puntos donde se anula $f'(x)$.

- $f'(0)=-1\neq 0\Rightarrow$ No puede haber máximo o mínimo

- $f'(0)=-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$

- $x=0\Rightarrow f(0)=3$

- $x=2\Rightarrow f(2)=1+\ln 2$

- $x=e\Rightarrow f(e)=\dfrac{2}{e}+1$

Luego, el mínimo absoluto está en el punto $(2,1+\ln 2)$ y el máximo absoluto en el punto $(0,3)$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-e^{x}+ax}{x\,sen(x)}$ es finito, calcula *a* y el valor del límite.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^{x}+ax}{x\,sen(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\,sen3x-e^{x}+a}{sen\,x+x\cos x} = \frac{-1+a}{0}$$

Como nos dicen que el límite existe y, es finito, el numerador debe de ser igual a cero para poder seguir aplicando la regla de L'Hôpital, luego: $-1+a=0 \Rightarrow a=1$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-e^{x}+x}{x\,sen(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\,sen3x-e^{x}+1}{sen\,x+x\cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x-e^{x}}{\cos x+\cos x-x\,sen\,x} = \frac{-10}{2} = -5$$

De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.
MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea mínima: $S_{\min} = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

b) Derivamos e igualamos a cero:

$$S'_{\min} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \ ; \ x = -1$$

c) Comprobamos el valor que corresponde a un mínimo.

$$S''_{\min} = \frac{2x \cdot x^2 - 2x(x^2-1)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$S''_{\min}(x=1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, el número que nos piden es: $x = 1$