PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2015

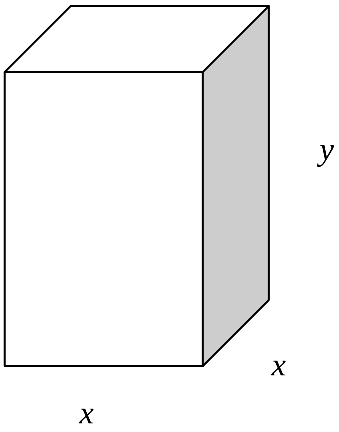
MATEMÁTICAS II

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13’5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo es: $S = x^2 + 4xy$

b) Relación entre las variables: $x^2 \cdot y = 13'5 \Rightarrow y = \dfrac{13'5}{x^2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x\frac{13'5}{x^2} = x^2 + \frac{54}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S' = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 54}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$$

e) Comprobamos que corresponde a un mínimo.

$$S'' = \frac{6x^2 \cdot x^2 - 2x(2x^3 - 54)}{x^4} = \frac{6x^3 - 4x^3 + 108}{x^3} = \frac{2x^3 + 108}{x^3} \Rightarrow S''(x = 3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{ Mínimo}$$

Luego, las dimensiones del depósito son: $x = 3\ m$; $y = 1'5\ m$

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de *a* y *b*.

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}\Rightarrow \text{Aplicamos la regla de L'Hopital}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen\,x}{2x\cdot\cos x^2}=\frac{0+b+0}{0}$$

Como dice que es finito, entonces, $b=0$ y podemos seguir aplicando la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2ax+b+sen\,x}{2x\cdot\cos x^2}=\frac{0+b+0}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos x}{2\cdot\cos x^2-2x\cdot 2x\cdot sen\,x^2}=\frac{2a+1}{2}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a+1=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

Luego, los valores son: $a=\frac{1}{2}$; $b=0$

Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28.800 euros.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Función que queremos que sea máximo: $S_{\max} = x \cdot y$

b) Relación entre las variables: $28.800 = 80x + 10x + 20y \Rightarrow y = \dfrac{28.800 - 90x}{20} = \dfrac{2880 - 9x}{2}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$S_{\max} = x \cdot y = x \cdot \frac{2880 - 9x}{2} = \frac{2880x - 9x^2}{2}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$S'_{\max} = \frac{2880 - 18x}{2} = 0 \Rightarrow x = 160\ m$$

e) Comprobamos que es un máximo

$$S''(x) = -9 \Rightarrow S''(160) = -9 < 0 \Rightarrow máximo$$

Luego, las dimensiones son: $x = 160\ m$; $y = 720\, m$

Determina *a* y *b* sabiendo que $b > 0$ y que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 2x & si \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es derivable. (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si la función es derivable en $x = 0$, primero tiene que ser continua en dicho punto, luego:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} a\cos x + 2x = a \\ \lim\limits_{x \to 0^+} a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} = b \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} -a\, sen\, x + 2 & si \quad x < 0 \\ a^2 \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{b}{(x+1)^2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Como es derivable en $x = 0$, se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \\ f'(0^+) = a^2 - b \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 - b = 2$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{r} a = b \\ a^2 - b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 - b = 2 \Rightarrow b = -1 \,;\, b = 2$$

Como nos dicen que $b > 0$, entonces los valores pedidos son: $a = b = 2$

Halla a y b sabiendo que es continua la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\cos(x)-ae^{x}}{x^{2}} & si \quad x\neq 0 \\ b & si \quad x=0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como la función es continua, estudiamos la continuidad en $x=0$

- $f(0)=b$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\cos x-ae^{x}}{x^{2}}=\dfrac{1-a}{0}$ Como el limite debe existir, ya que es continua, el numerador

debe valer cero para poder aplicar la regla de L'Hôpital, luego $1-a=0\Rightarrow a=1$.

Aplicamos la regla de L'Hôpital para calcular el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\cos x-1\cdot e^{x}}{x^{2}}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{1-sen\,x-e^{x}}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos-e^{x}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1=f(0)=b\Rightarrow b=-1$.

Luego, $a=1$; $b=-1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x^2+3x+1)\cdot e^{-x}$.
a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.
b) Halla los puntos de la gráfica de *f* cuya recta tangente es horizontal.
c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=\dfrac{x^2+3x+1}{e^x}$, no tiene asíntota vertical ya que no hay ningún valor de x que anule el denominador.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$ cuando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)=\lim_{x\to+\infty}((-x)^2+3(-x)+1)\cdot e^{-(-x)}=\lim_{x\to+\infty}(x^2-3x+1)\cdot e^{x}=(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$$

Por lo tanto, no tiene asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$.

Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero:

$$y'=\frac{(2x+3)\cdot e^x-(x^2+3x+1)\cdot e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x^2-x+2}{e^x}=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=1$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
Signo y'	—	+	—
Función	D	C	D

$\downarrow$ $\downarrow$

mínimo $(-2,-e^2)$ Máximo $(1,5e^{-1})$

Luego, los puntos donde la tangente es horizontal son: $(-2,-e^2)$ y $(1,5e^{-1})$.

c) La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$f(0)=1$
$f'(0)=2$

Luego la recta tangente en $x=0$ es $y-1=2\cdot(x-0)\Rightarrow y=2x+1$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x-1}$ para $x\neq 1$.

a) Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de *f*.

b) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El dominio de la función *f(x)* es $\mathbb{R}-\{1\}$

Asíntotas Verticales: La recta $x=1$ es una asíntota vertical ya que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\pm\infty$

Asíntotas Horizontales: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\dfrac{e^{\infty}}{\infty}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{x}}{1}=\infty\Rightarrow$ No tiene

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\frac{e^{-\infty}}{\infty}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow y=0$$

Luego, y = 0 es una asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblicua.

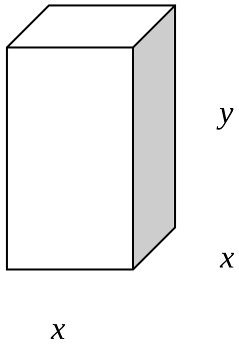
b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $y'=\dfrac{e^{x}(x-2)}{(x-1)^{2}}=0\Rightarrow x=2$

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	—	—	+
Función	D	D	C

$\downarrow$ No existe $\quad\downarrow$ mínimo $(2,e^{2})$

Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea máximo: $V_{\max} = x^2 \cdot y$

b) Relación entre las variables: $60 = y + 4x$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$V_{\max} = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (60 - 4x) = 60x^2 - 4x^3$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$V' = 120x - 12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = 10$$

e) Comprobamos que es un máximo.

$$V'' = 120 - 24x \Rightarrow V''(x = 10) = 120 - 240 = -120 < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = 10\,cm \; ; \; y = 20\,cm$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Halla los coeficientes *a*, *b*, *c* y *d* sabiendo que *f* presenta un extremo local en el punto de abscisa $x=0$, que $(1,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de *f* y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La función será: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Calculamos su derivada primera y segunda:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ ;\ f''(x)=6ax+2b$$

- *f* tiene un mínimo local en el punto de abscisa $x=0\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0$.

- El punto (1,0) es un punto de inflexión de la gráfica de *f*

$$\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ por\ (1,0)\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0\Rightarrow a+b+d=0 \\ f''(1)=0\Rightarrow 6a\cdot 1+2b=0\Rightarrow 6a+2b=0 \end{cases}$$

- La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$ tiene de pendiente -3

$$\Rightarrow f'(1)=-3\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-3\Rightarrow 3a+2b=-3$$

Resolviendo el sistema resulta: $a=1$; $b=-3$; $c=0$; $d=2\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+2$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-|x|$.

a) Estudia la derivabilidad de *f*.

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.

c) Calcula los extremos relativos de *f* (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $f(x)=x^2-|x|=\begin{cases} x^2+x & si \quad x<0 \\ x^2-x & si \quad x\geq 0\end{cases}$

Las funciones x^2+x y x^2-x por ser polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. En el único punto donde puede haber problemas es en $x=0$, que es el punto donde cambiamos de una a otra. Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=0$

Veamos la continuidad de $f(x)$ en $x=0$:

1) $f(0)=0$

2) $\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0 \\ \lim_{x\to 0^+}(x^2-x)=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=0$

3) $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0$

Por lo tanto, la función es continua en $x=0$

Estudiamos ya la derivabilidad de $f(x)$, en particular en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ 2x-1 & si \quad x>0\end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^-)&=\ \ 1 \\ f'(0^+)&=-1\end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)\Rightarrow \text{No derivable}$$

b y c) Igualamos a cero la primera derivada:

$$2x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$2x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Signo y'	—	+	—	+
Función	D	C	D	C

$\downarrow$ $\quad\downarrow\quad$ $\downarrow$

m $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ Pico $(0,0)$ m $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$

Halla los valores de *a*, *b* y *c* sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x=1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local de abscisa $x=3$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Las asíntotas verticales son los valores que anulan el denominador, luego:

$$x+c=0\Rightarrow 1+c=0\Rightarrow c=-1.$$

Como f tiene una asíntota oblicua con pendiente 2, tenemos que:

$$2\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2-x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2x-1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{2}=2\Rightarrow a=2$$

Calculamos la derivada de $f(x)=\dfrac{2x^2+b}{x-1}$

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x-1)-1\cdot(2x^2+b)}{(x-1)^2}$$

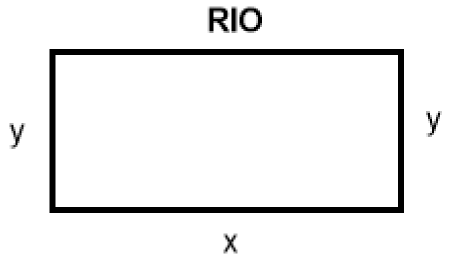
Como tiene un extremo local en $x=3\Rightarrow f'(3)=0$, luego:

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x-1)-1\cdot(2x^2+b)}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{4\cdot 3\cdot(3-1)-1\cdot(2\cdot 3^2+b)}{(3-1)^2}=0\Rightarrow \frac{24-18-b}{4}=0\Rightarrow b=6$$

Luego, los valores son: $a=2$; $b=6$; $c=-1$

Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180.000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al rio no necesita vallado?.
MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



a) Función que queremos que sea mínima: $P_{\min} = x + 2y$

b) Relación entre las variables: $x \cdot y = 180.000 \Rightarrow y = \dfrac{180.000}{x}$

c) Expresamos la función que queremos que sea máximo con una sola variable.

$$P_{\min} = x + 2y = x + 2 \cdot \frac{180.000}{x} = x + \frac{360.000}{x}$$

d) Derivamos e igualamos a cero

$$P'_{\min} = 1 - \frac{360.000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{360.000} = \pm 600$$

e) Comprobamos que corresponde a un máximo

$$P'' = \frac{2x \cdot 360.000}{x^4} = \frac{720.000}{x^3} \Rightarrow P''(x = 600) = \frac{1}{300} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

Luego, las dimensiones son: $x = 600\ m$; $y = \dfrac{600}{2} = 300\ m$