

MATEMÁTICAS II

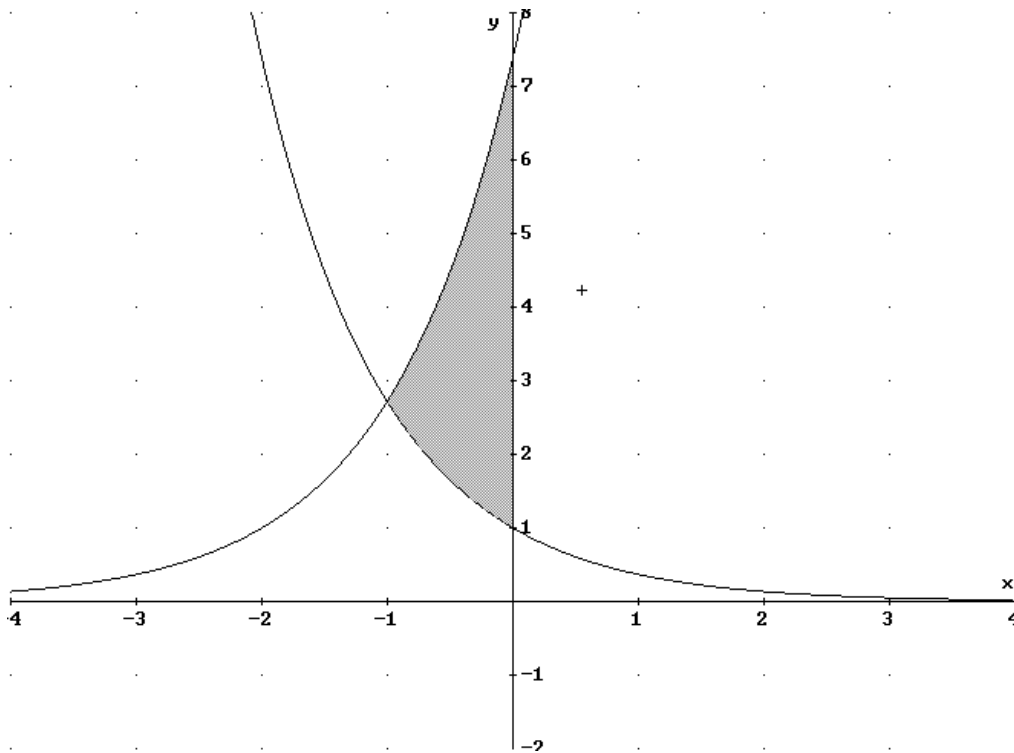
TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas: $y = e^{x+2}$; $y = e^{-x}$; $x = 0$
b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2000. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



b)

$$A = \int_{-1}^0 (e^{x+2} - e^{-x}) dx = [e^{x+2} + e^{-x}]_{-1}^0 = e^2 - 2e + 1 \text{ u}^2$$

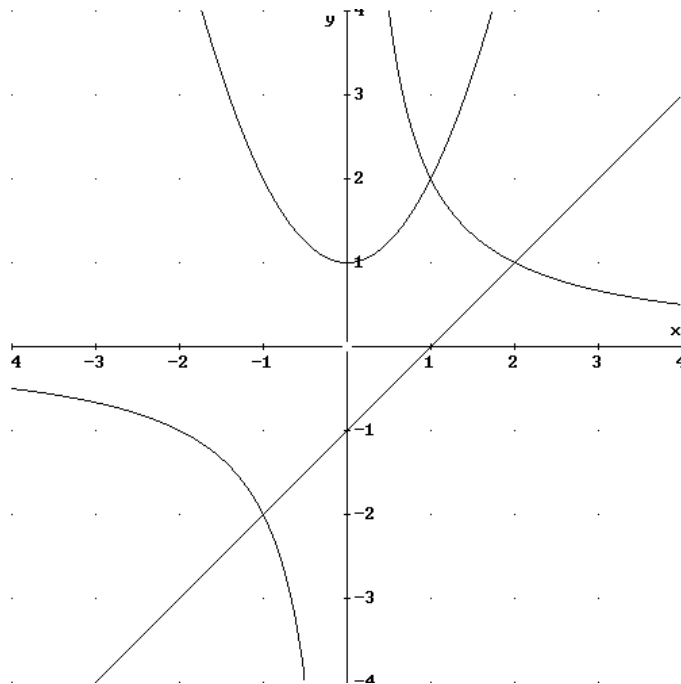
a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas:

$$y = x^2 + 1 ; y = \frac{2}{x} ; y = x - 1$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^2 \left[\frac{2}{x} - x + 1 \right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[2 \ln x - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = \\ &= \left[\frac{1}{3} + 1 + 2 \ln 2 - 2 + 2 - 2 \ln 1 + \frac{1}{2} - 1 \right] = \frac{5}{6} + 2 \ln 2 \end{aligned}$$

a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9-x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x=1$ y el eje de abscisas.

b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

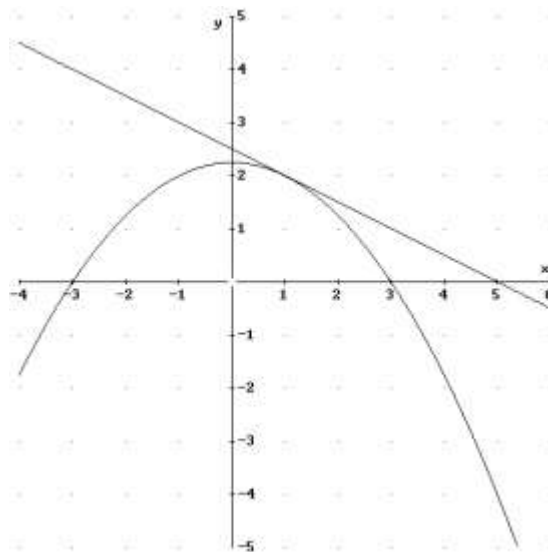
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x=1$.

$$- x=1 \Rightarrow y = \frac{9-1}{4} = 2$$

$$- y' = \frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2} \Rightarrow m = y'(x=1) = -\frac{1}{2}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y-2 = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-x+5}{2}$.



b)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^5 \frac{-x+5}{2} dx - \int_1^3 \frac{9-x^2}{4} dx = \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} \right]_1^5 - \left[\frac{9x}{4} - \frac{x^3}{12} \right]_1^3 = \\ &= \left[-\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \right] - \left[\frac{27}{4} - \frac{27}{12} - \frac{9}{4} + \frac{1}{12} \right] = \frac{5}{3} u^2 \end{aligned}$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 + x - x^2$. Calcula α , $\alpha < 2$, de forma que:

$$\int_{\alpha}^2 f(x) dx = \frac{9}{2}$$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos el área encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

$$\int_{\alpha}^2 (2 + x - x^2) dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\alpha}^2 = 4 + 2 - \frac{8}{3} - 2\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2} ; \alpha = -1$$

Como $\alpha < 2$, el valor pedido es $\alpha = -1$.

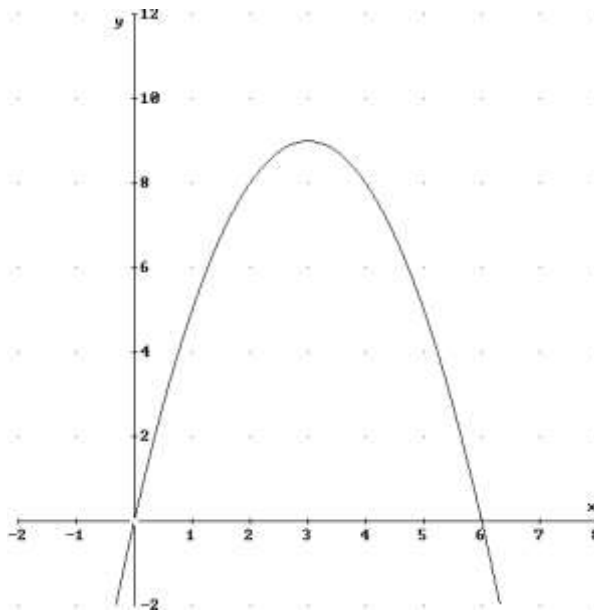
Calcule el valor de α positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α .
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas.

$$\alpha x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = \alpha$$

$$\int_0^{\alpha} (\alpha x - x^2) dx = \left[\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\alpha} = \frac{\alpha^3}{6} = 36 \Rightarrow \alpha = 6$$



Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^3 (x^2 + 5) \cdot e^{-x} dx$

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int (x^2 + 5) \cdot e^{-x} dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 5; \quad du = 2x dx \\ dv &= e^{-x} dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= e^{-x} dx; \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$I = \int (x^2 + 5) \cdot e^{-x} dx = -(x^2 + 5) \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} dx = -(x^2 + 5) \cdot e^{-x} + 2 \left[-x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx \right] = -e^{-x} (x^2 + 2x + 7)$$

$$\int_{-1}^3 (x^2 + 5) \cdot e^{-x} dx = \left[-e^{-x} (x^2 + 2x + 7) \right]_{-1}^3 = \frac{6e^4 - 22}{e^3}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 6 - x^2$; $g(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$.

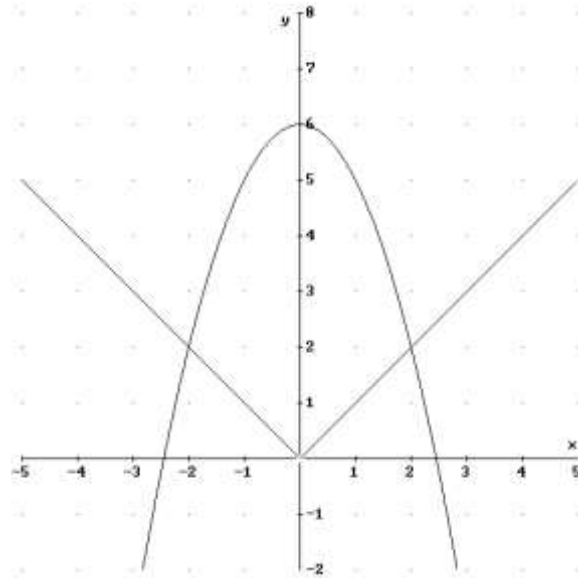
a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g .

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$- A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3} u^2$$

Sea $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por: $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t}) dt$

a) Determina $F(1)$.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.
MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\text{a) } F(x) = x^2 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Rightarrow F(1) = \frac{5}{3}$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ F(x_0) = \frac{5}{3} \\ F'(x_0) = 2x + \sqrt{x} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow y - F(x_0) = F'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - \frac{5}{3} = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = \frac{9x - 4}{3}$$

Considera las funciones $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen} 2x$

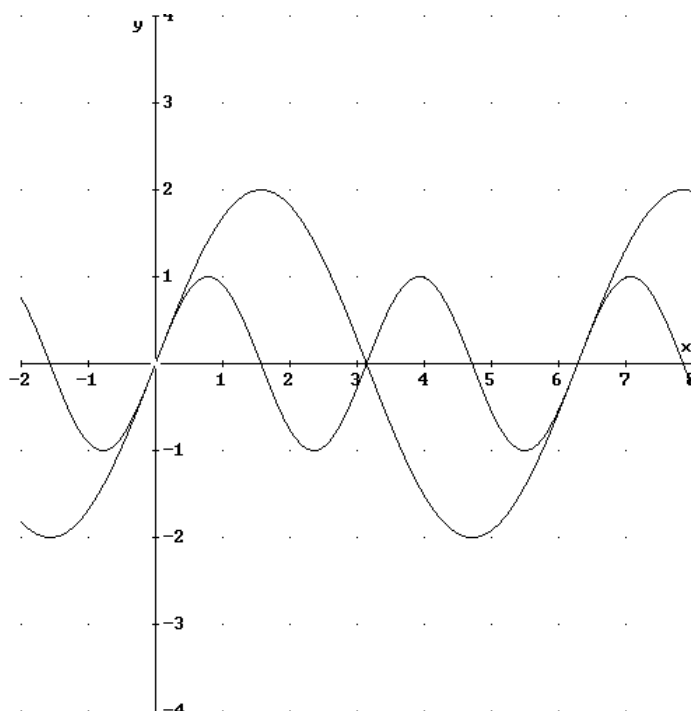
a) Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g .

b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2000. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$A = \int_0^{\pi} (2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x) dx = 4 + 4 = 8 \text{ u}^2$$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (1+x) \cdot e^x$

a) Calcula $\int f(x) dx$

b) Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,3)$.

MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la integral $I = \int (1+x) \cdot e^x dx$, que es una integral por partes.

$$u = 1+x; \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx; \quad v = e^x$$

$$I = \int (1+x) \cdot e^x dx = (1+x) \cdot e^x - \int e^x dx = (1+x) \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x + C$$

b) Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,3)$.

$$3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $I = x \cdot e^x + 3$

Calcula la siguiente integral definida $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$. ¿Qué representa geoméricamente?
MATEMÁTICAS II. 2000. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 ; x = -3$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x+1)}{(x+1)(x+3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = -1 \Rightarrow 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x = -3 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x+3) + C$$

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x+3) \right]_0^2 = \frac{\ln\left(\frac{9}{5}\right)}{2}$$