PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2001

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

Siendo ln x el logaritmo neperiano de x, considera la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\cdot\ln x$. Calcula:

a) $\int f(x)dx$.

b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot lnx\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx;\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}}$$

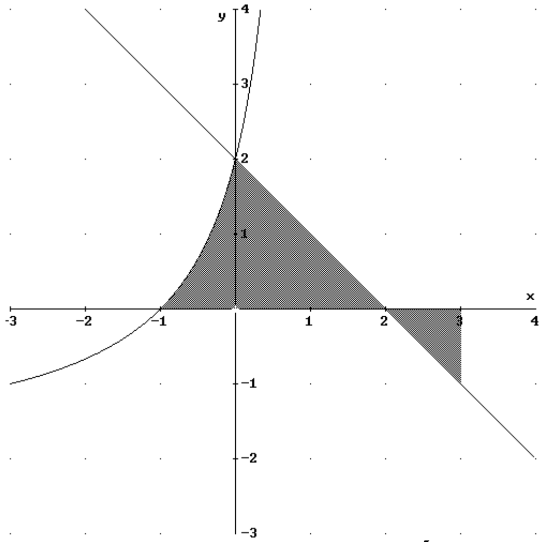
$$I=\int x\cdot ln\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln\,x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+C$$

b) Calculamos una primitiva que pase por el punto (1,0).

$$0=\frac{1^2}{2}\cdot ln1-\frac{1}{4}1^2+C\Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $I=\dfrac{x^2}{2}\cdot ln\,x-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}$

Halla el área del recinto rayado que aparece en la figura adjunta sabiendo que la parte curva tiene como ecuación $y=\dfrac{2x+2}{1-x}$



MATEMÁTICAS II. 2001. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$$A_1=\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{1-x}\,dx=\int_{-1}^{0}\left(-2+\frac{4}{1-x}\right)dx=\left[-2x-4\ln(1-x)\right]_{-1}^{0}=4\ln 2-2$$

$$A_2=\int_{0}^{2}(-x+2)\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{2}=2$$

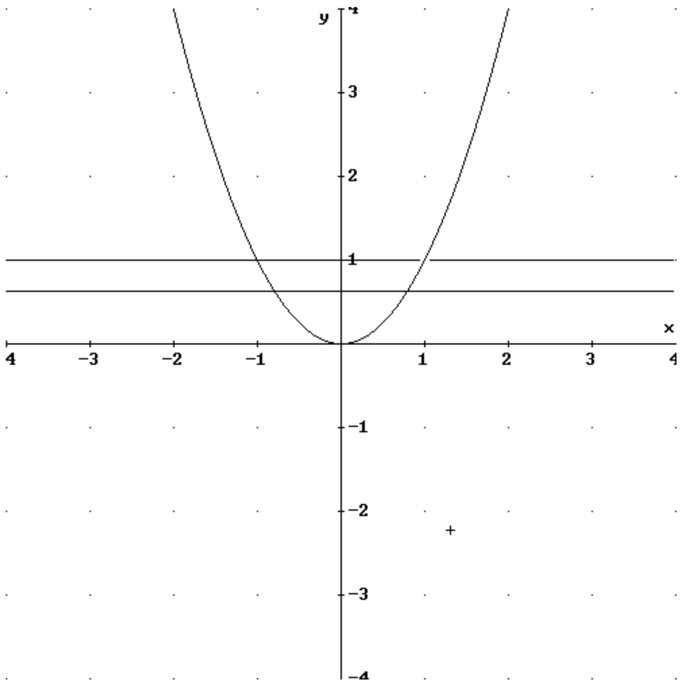
$$A_3=\int_{2}^{3}0-(-x+2)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_{2}^{3}=\frac{1}{2}$$

El área pedida es:

$$A=A_1+A_2+A_3=4\ln 2-2+2+\frac{1}{2}=4\ln 2+\frac{1}{2}$$

Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Hallar el valor de *a*.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos el área encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$.

$$Área = 2 \cdot \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 2 \cdot \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{4}{3}\ u^2$$

Calculamos los puntos de corte de la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$.

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

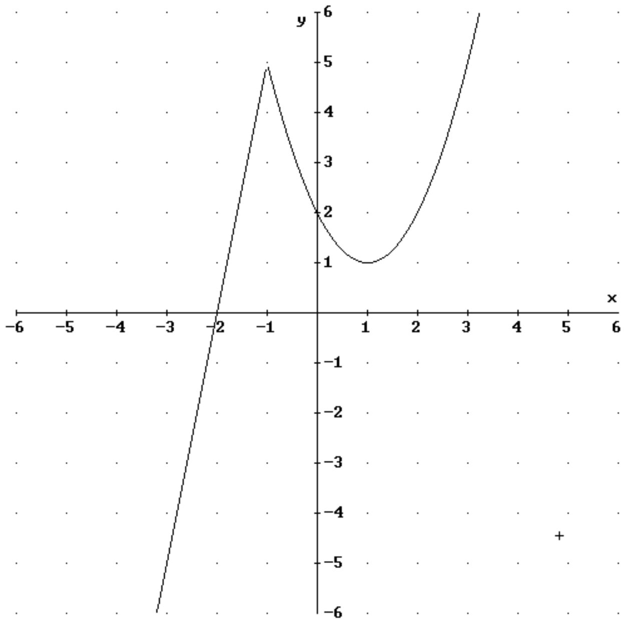
$$\frac{2}{3} = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = 2 \cdot \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} = 2 \cdot \left[a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} \right] = \frac{4}{3} a\sqrt{a} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **la función definida por:** $f(x)=\begin{cases} 5x+10 & si \quad x\le -1 \\ x^2-2x+2 & si \quad x>-1 \end{cases}$

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

$$Área=\int_{-2}^{-1}(5x+10)\,dx+\int_{-1}^{3}(x^2-2x+2)\,dx=\left[\frac{5x^2}{2}+10x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_{-1}^{3}=\frac{5}{2}+\frac{28}{3}=\frac{71}{6}\ u^2$$

Considera la función $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} a(x-1) & si \quad -1<x\le 1 \\ x\ln x & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Determina el valor de a sabiendo que f es derivable.

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 1 OPCIÓN B.

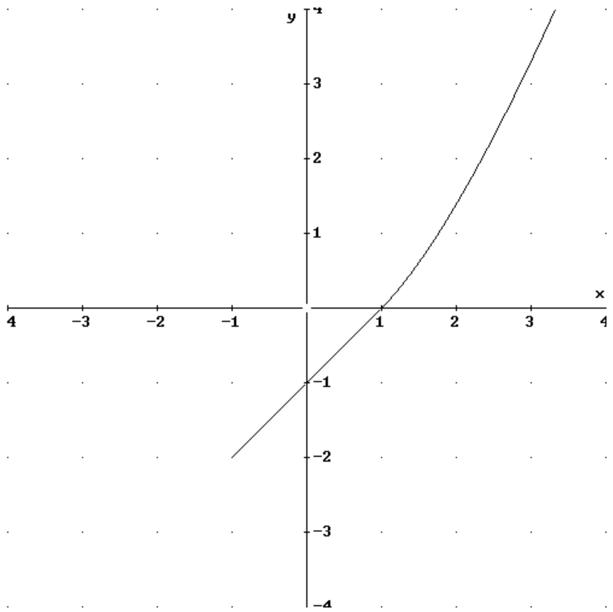
R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable primero tiene que ser continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} a\cdot(x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} x\cdot \ln x=0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1^-} = \lim\limits_{x\to 1^+} = 0 \Rightarrow \text{ Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} a & si \quad -1<x\le 1 \\ \ln x+1 & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=a \\ f'(1^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=1$$



b)

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 (x-1)\,dx+\int_1^2 x\cdot\ln x\,dx=\left[\frac{x}{2}-x\right]_0^1+\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=\frac{1}{2}-1+2\ln 2-1+\frac{1}{4}=2\ln 2-\frac{5}{4}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por : $f(x)=\left| x^2-1\right|$

a) Esboza la gráfica de *f*.

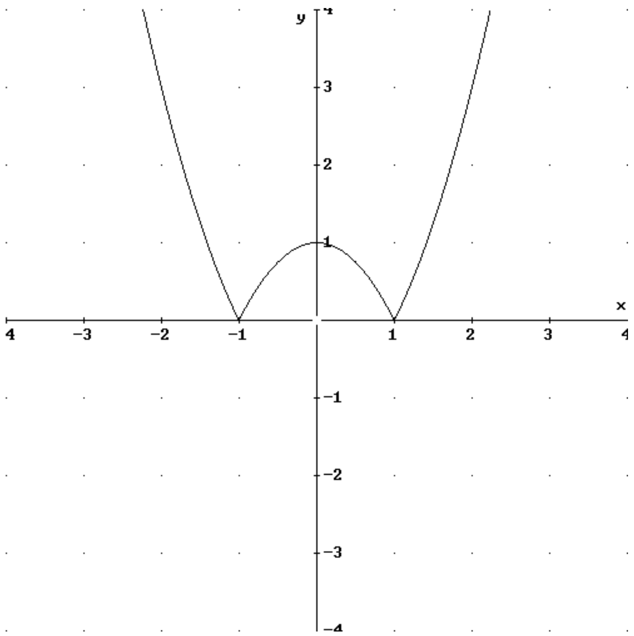
b) Estudia la derivabilidad de *f*.

c) Calcula $\int_0^2 f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Abrimos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x<-1 \\ -x^2+1 & si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2-1 & si \quad x>1 \end{cases}$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x & si \quad x<-1 \\ -2x & si \quad -1<x<1 \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1^-)=-2 \\ f'(-1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(-1^-)\neq f'(-1^+) \quad ; \quad \left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-2 \\ f'(1^+)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+)$$

Luego, la función es derivable en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

c)

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(-x^2+1)\,dx+\int_1^2(x^2-1)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2=-\frac{1}{3}+1+\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1=2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=-2x^3-9x^2-12x$.
a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Determina los extremos relativos α y β de *f* con $\alpha<\beta$ y calcula $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=-6x^2-18x-12=0\Rightarrow x=-2\ ;\ x=-1$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,\infty)$
Signo y'	–	+	–
Función	D	C	D

Máximo en $(-1,5)$; mínimo en $(-2,4)$

b)

$$\int_{-2}^{-1}(-2x^3-9x^2-12x)\,dx=\left[-\frac{2x^4}{4}-\frac{9x^3}{3}-\frac{12x^2}{2}\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}+3-6+8-24+24=\frac{9}{2}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & si \quad x<0\\ 1-mx-x^2 & si \quad x\geq 0\end{cases}$

a) Determina *m* sabiendo que *f* es derivable.

b) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx$

MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 1 OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable primero tiene que ser continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{1-x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}1-mx-x^2=1\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0^-}=\lim\limits_{x\to 0^+}=1\Rightarrow \text{ Continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2} & si \quad x<0\\ -m-2x & si \quad x\geq 0\end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l}f'(0^-)=1\\ f'(0^+)=-m\end{array}\right\}\Rightarrow m=-1$$

b)

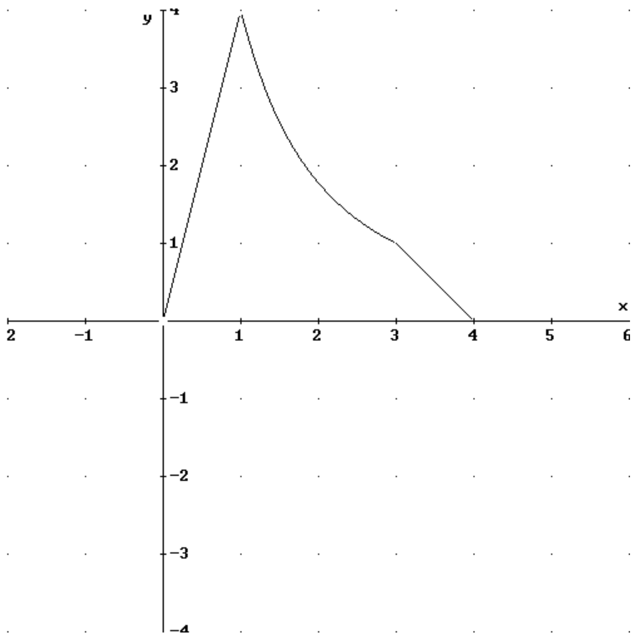
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-x}\,dx+\int_{0}^{1}(1+x-x^2)\,dx=\left[-\ln(1-x)\right]_{-1}^{0}+\left[x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=\ln 2+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\ln 2+\frac{7}{6}$$

Considera la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ definida por: $f(x)=\begin{cases} 4x & si\ \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{16}{(x+1)^2} & si\ \ 1<x<3 \\ 4-x & si\ \ 3\le x\le 4 \end{cases}$

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2001. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

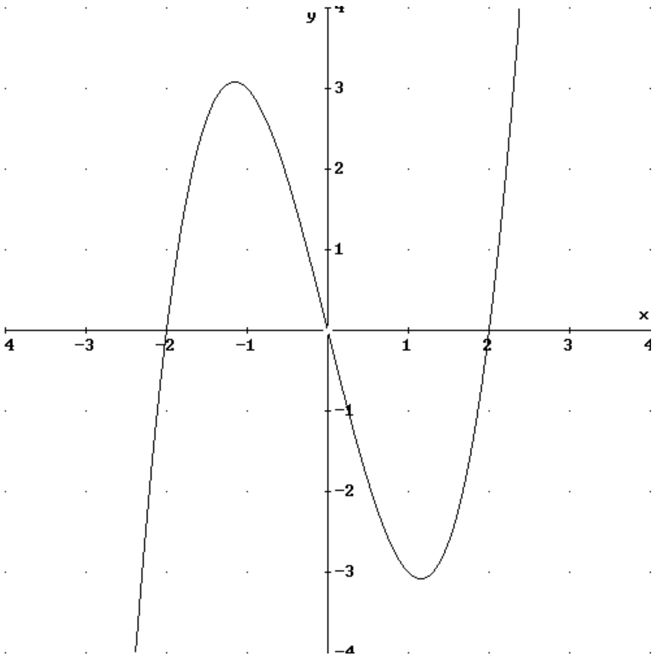


b)

$$Área=\int_0^1 4x\,dx+\int_1^3\frac{16}{(x+1)^2}\,dx+\int_3^4(4-x)\,dx=\left[2x^2\right]_0^1+\left[-\frac{16}{(x+1)}\right]_1^3+\left[4x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4=2+4+\frac{1}{2}=\frac{13}{2}\ u^2$$

Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas $y = 0$

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 2 \ ; \ x = -2$$

Por lo tanto, el área pedida será:

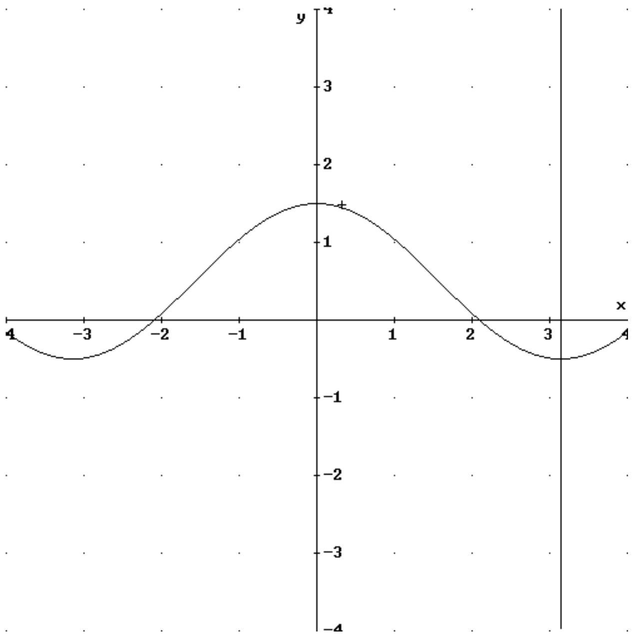
$$A = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right)dx + \int_{0}^{2} \left(-x^3 + 4x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left(-4+8\right) + \left(-4+8\right) = 8 \ u^2$$

a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y=\frac{1}{2}+\cos x$, los ejes de coordenadas y la recta $x=\pi$.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2001. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y=\frac{1}{2}+\cos x$ y el eje de abscisas $y=0$

$$\frac{1}{2}+\cos x=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, el área pedida será:

$$A=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left(-\frac{1}{2}-\cos x\right)dx=\left[\frac{x}{2}+sen\,x\right]_0^{\frac{2\pi}{3}}+\left[-\frac{x}{2}-sen\,x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{\pi}{2}-0+\frac{2\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\ u^2$$