PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2003

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A

Sea $Ln(1-x^2)$ el logaritmo neperiano de $1-x^2$ y sea $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(1-x^2)$. Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$u=\ln(1-x^2);\ du=\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

$$\int \ln(1-x^2)\,dx = x\ln\left|1-x^2\right|+2\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx$$

Hacemos la integral racional $\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx$. Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx=\int -1\,dx+\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=-x+\int\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $1-x^2 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=1$

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}=\frac{A(1-x)+B(1+x)}{(1+x)(1-x)}$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=-1\Rightarrow 1=2A\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$
$$x=1\Rightarrow 1=2B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx=-x+\int\frac{1}{1-x^2}\,dx=-x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x}\,dx=-x+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln|1-x|$$

Por lo tanto la integral que nos pedían es:

$$\int\ln(1-x^2)\,dx=x\ln(1-x^2)+2\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx=x\ln\left|1-x^2\right|+2\left(-x+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln|1-x|\right)=$$
$$=x\ln\left|1-x^2\right|-2x+\ln|1+x|-\ln|1-x|+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,1)$.

$$1=0\cdot\ln 1-0+\ln 1-\ln|-1|+C\Rightarrow C=1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x\ln\left|1-x^2\right|-2x+\ln|1+x|-\ln|1-x|+1$

Dadas la parábola de ecuación $y = 1 + x^2$ y la recta de ecuación $y = 1 + x$, se pide:
a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.
b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.
MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1 + x^2 \\ y = 1 + x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 1$$

El área que nos piden es:

$$A = \int_0^1 \left[(1+x) - (1+x^2)\right] dx = \int_0^1 \left[x - x^2\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \ u^2$$

b) La pendiente de la recta que nos dan es 1, luego:

$$y' = 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Calculamos la recta tangente que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ y tiene de pendiente 1.

$$y - \frac{5}{4} = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{4x+3}{4}$$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x=0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x=-1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)\,dx=6$, halla *a, b* y *c*.

MATEMÁTICAS II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \ ; \ f''(x)=6x+2a$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Extremo relativo en $x=0 \Rightarrow f'(0)=0 \Rightarrow b=0$

- Punto de inflexión en $x=-1 \Rightarrow f''(-1)=0 \Rightarrow -6+2a=0 \Rightarrow a=3$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=6 \Rightarrow \int_0^1 (x^3+3x^2+c)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}+cx\right]_0^1=\frac{1}{4}+1+c=6 \Rightarrow c=\frac{19}{4}$

Luego, $a=3$; $b=0$; $c=\frac{19}{4}$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2x^3-6x+4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y su recta tangente en el punto de abscisa correspondiente al máximo relativo de la función.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos las coordenadas del máximo de la función.

$$f'(x)=6x^2-6=0\Rightarrow x=\pm 1\ ;\ f''(1)=12>0\Rightarrow \textit{mínimo}\ ;\ f''(-1)=-12<0\Rightarrow \textit{Máximo}$$

Luego, el máximo está en el punto $P(-1,8)$. La pendiente valdrá $f'(-1)=6(-1)^2-6=0\Rightarrow m=0$.

Por lo tanto, la recta tangente tiene de ecuación: $y-8=0\cdot(x+1)\Rightarrow y=8$

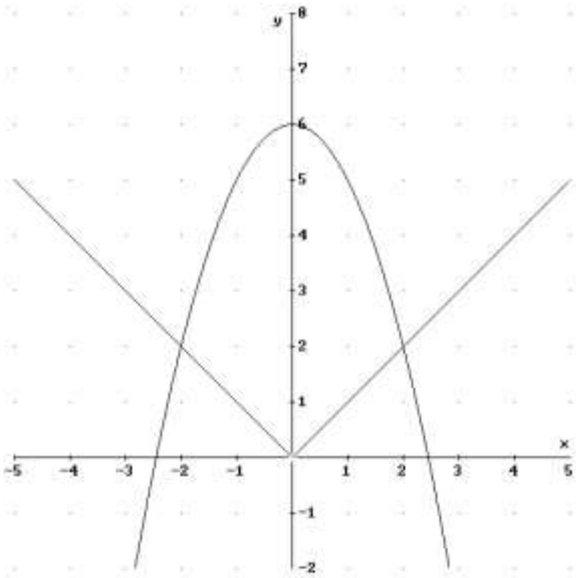
Calculamos el área que nos piden.

$$A=\int_{-1}^{2}(8-2x^3+6x-4)\,dx=\left[-\frac{2x^4}{4}+\frac{6x^2}{2}+4x\right]_{-1}^{2}=\left[-\frac{32}{4}+\frac{24}{2}+8\right]-\left[-\frac{2}{4}+\frac{6}{2}-4\right]=\frac{27}{2}\,u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 6 - x^2$; $g(x) = |x|$ $x \in \mathbb{R}$.
a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b)

- $A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x)\, dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3}\ u^2$

Se sabe que la función $f:(0,3)\to \mathbb{R}$ es derivable en todo punto de su dominio, siendo $f'(x)=\begin{cases} x-1 & si\ 0<x\le 2 \\ -x+3 & si\ 2<x<3 \end{cases}$ y que $f(1)=0$. Halla la expresión analítica de *f*.

MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Integramos para calcular la expresión de $f(x)$, que será: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+C & si\ 0<x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x+D & si\ 2<x<3 \end{cases}$.

A continuación aplicamos las condiciones del problema para calcular *C* y *D*.

$$f(1)=0\Rightarrow \frac{1}{2}-1+C=0\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

La función tiene que ser continua, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} -\dfrac{x^2}{2}+3x+D=4+D \end{array}\right\} \Rightarrow 4+D=\frac{1}{2}\Rightarrow D=-\frac{7}{2}$$

Por lo tanto, la expresión de *f* es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}-x+\dfrac{1}{2} & si\ 0<x\le 2 \\ -\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{7}{2} & si\ 2<x<3 \end{cases}$.

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2-2x+2$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=3$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje OY.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto tiene de coordenadas $P(3,5)$. La pendiente valdrá $f'(3)=2\cdot 3-2=4\Rightarrow m=4$.

Por lo tanto, la recta tangente tiene de ecuación: $y-5=4\cdot(x-3)\Rightarrow y=4x-7$

b) Calculamos el área que nos piden.

$$A=\int_0^3\left[\left(x^2-2x+2\right)-\left(4x-7\right)\right]dx=\int_0^3\left[x^2-6x+9\right]dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+9x\right]_0^3=\left[\frac{27}{3}-\frac{54}{2}+27\right]=9\ u^2$$

Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x=1$, que su gráfica pasa por el punto $(1,4)$ y que $\int_{-1}^{3} f(x)dx=\dfrac{32}{3}$. Halla *a*, *b* y *c*.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=2ax+b \ ; \ f''(x)=2a$$

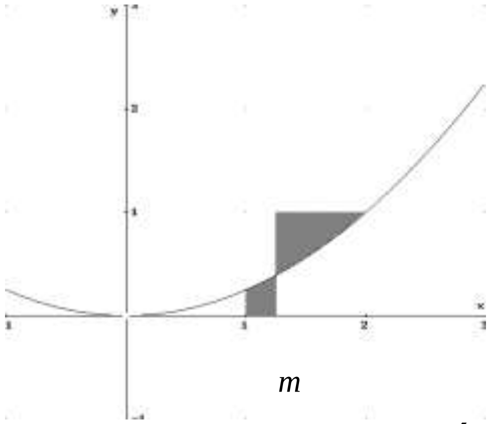
Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a+b=0$

- Pasa por $(1,4) \Rightarrow f(1)=4 \Rightarrow a+b+c=4$

- $\int_{-1}^{3}(ax^2+bx+c)\,dx=\dfrac{32}{3} \Rightarrow \left[\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{bx^2}{2}+cx\right]_{-1}^{3}=\dfrac{28a}{3}+4b+4c=\dfrac{32}{3}$

En la figura adjunta puedes ver representada en el intervalo $[0,2]$ la gráfica de la parábola de ecuación $y = \dfrac{x^2}{4}$. Halla el valor de *m* para el que las áreas de las superficies rayadas son iguales.



MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

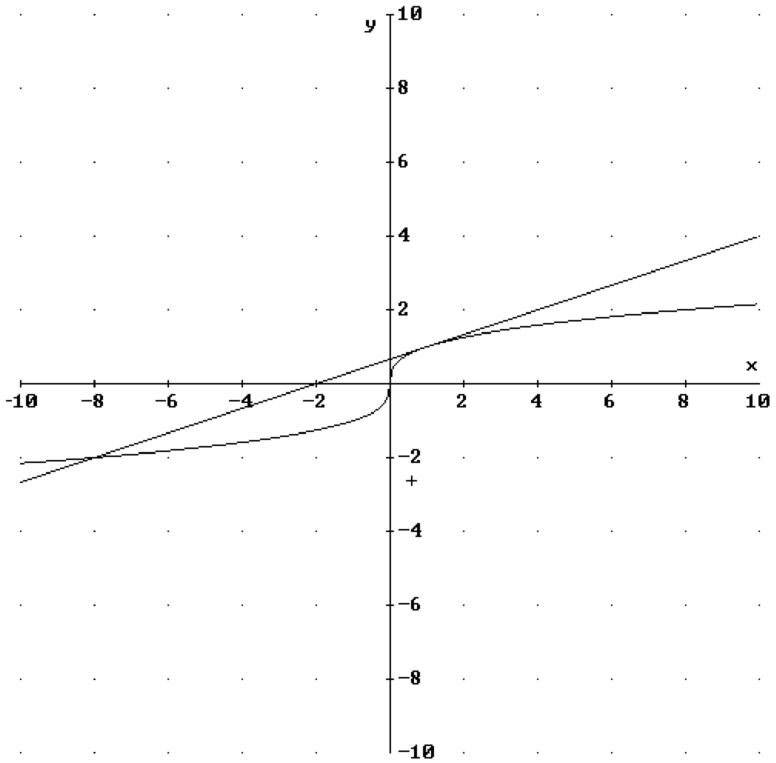
$$- \int_1^m \frac{x^2}{4}\,dx = \int_m^2 \left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx \Rightarrow \left[\frac{x^3}{12}\right]_1^m = \left[x-\frac{x^3}{12}\right]_m^2 \Rightarrow \frac{m^3-1}{12} = \frac{m^3}{12} - m + \frac{4}{3} \Rightarrow m = \frac{17}{12}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
a) Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta tangente obtenida.
c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente pasa por el punto $P(1,1)$ y su pendiente vale $y'(1)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Rightarrow m=\dfrac{1}{3}$. Luego, la recta tangente es: $y-1=\dfrac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=\dfrac{x+2}{3}$

b)



c)

$$A=\int_{-8}^{1}\left(\frac{x+2}{3}-\sqrt[3]{x}\right)dx=\left[\frac{x^2}{6}+\frac{2x}{3}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_{-8}^{1}=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{64}{6}+\frac{16}{3}+12=\frac{27}{4}\ u^2$$

Determina el valor positivo de λ para el que el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = \lambda x$ es 1.
MATEMÁTICAS II. 2003. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \lambda x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - \lambda x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = \lambda$$

$$A = \int_0^{\lambda} (\lambda x - x^2)\ dx = \left[\frac{\lambda x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\lambda} = \frac{\lambda^3}{6} = 1 \Rightarrow \lambda = \sqrt[3]{6}$$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=(x-1)\cdot Ln\,x$. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ \ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=(x-1)\,dx;\ v=\dfrac{x^2}{2}-x \end{array}}$$

$$I=\int (x-1)\cdot ln\,x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$.

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2+x+C\Rightarrow-\frac{3}{2}=\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot ln1-\frac{1}{4}+1+C\Rightarrow C=-\frac{9}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\cdot ln\,x-\dfrac{1}{4}x^2+x-\dfrac{9}{4}$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{\frac{x}{3}}$
a) ¿En qué punto de la gráfica de *f* la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas?. Halla la ecuación de dicha tangente.
b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto será $P\left(a,e^{\frac{a}{3}}\right)$ y la pendiente valdrá: $y'=\dfrac{e^{\frac{x}{3}}}{3}\Rightarrow m=\dfrac{e^{\frac{a}{3}}}{3}$.

La ecuación de la recta tangente será: $y-e^{\frac{a}{3}}=\dfrac{e^{\frac{a}{3}}}{3}(x-a)$. Como queremos que pase por el origen de coordenadas, se debe cumplir que:

$$0-e^{\frac{a}{3}}=\frac{e^{\frac{a}{3}}}{3}(0-a)\Rightarrow -3e^{\frac{a}{3}}=-ae^{\frac{a}{3}}\Rightarrow a=3$$

Luego, el punto será: $P(3,e)$ y la recta tangente: $y-e=\dfrac{e}{3}(x-3)\Rightarrow y=\dfrac{ex}{3}$.

b) Vamos a calcular los puntos de corte de la función $y=\dfrac{1}{2}+\cos x$ y el eje de abscisas

$$\frac{1}{2}+\cos x=0\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

Por lo tanto, el área pedida será:

$$A=\int_0^3\left(e^{\frac{x}{3}}-\frac{ex}{3}\right)dx=\left[3e^{\frac{x}{3}}-\frac{ex^2}{6}\right]_0^3=\left(3e-\frac{9e}{6}\right)-(3)=\frac{3e}{2}-3\ u^2$$