PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2007

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^3+3x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=x+3$$

a) Esboza las gráficas de *f* y de *g* calculando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de cada uno de los dos recintos limitados entre las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

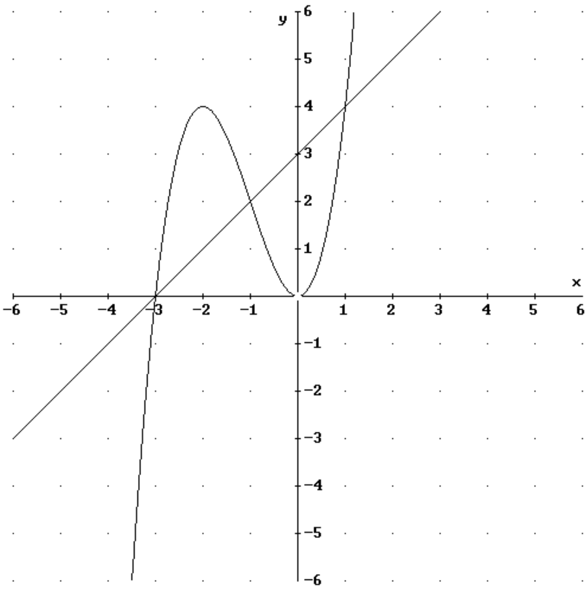
R E S O L U C I Ó N

a) Para dibujar la función $f(x)=x^3+3x^2$, vamos a calcular sus extremos relativos y puntos de corte con los ejes.

$$f'(x)=3x^2+6x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=-2$$
$$f''(x)=6x+6$$
$$f''(0)=6>0 \Rightarrow \text{mínimo } (0,0)$$
$$f''(-2)=-6<0 \Rightarrow \text{Máximo } (-2,4)$$

La función corta al eje X en $(0,0)$ y $(-3,0)$.

Para dibujar la función $g(x)=x+3$, basta con hacer una tabla de valores, ya que es una recta.



Vemos claramente en el dibujo que las funciones se cortan en los puntos: $(-3,0)$; $(-1,2)$ y $(1,4)$

b)

$$A_1=\int_{-3}^{-1}\left[(x^3+3x^2)-(x+3)\right]dx=\int_{-3}^{-1}(x^3+3x^2-x-3)dx=\left[\frac{x^4}{4}+x^3-\frac{x^2}{2}-3x\right]_{-3}^{-1}=4u^2$$

$$A_2=\int_{-1}^{1}\left[(x+3)-(x^3+3x^2)\right]dx=\int_{-1}^{1}(-x^3-3x^2+x+3)dx=\left[-\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}=4u^2$$

Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=Ln(1+x^2)$, halla la primitiva de f cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas (Ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int 2\,dx+\int\frac{2}{1+x^2}\,dx =$$
$$= x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\,x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=Ln(1+x^2);\ du=\dfrac{2x}{1+x^2}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

De todas las primitivas de $f(x)$

$$F(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\,x+C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$F(0)=0\cdot Ln(1+0^2)-2\cdot 0+2\,arc\,tg\,0+C=0\Rightarrow C=0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\,x$

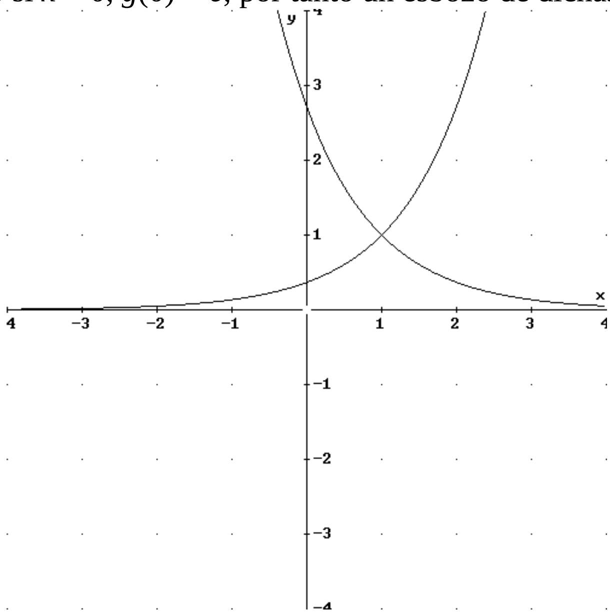
Considera las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=e^{x-1} \quad \text{y} \quad g(x)=e^{1-x}$$

a) Esboza las gráficas de *f* y de *g* y determina su punto de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por el eje OY y las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La gráfica de $f(x)=e^{x-1}$, es exactamente igual que la de e^x pero desplazada una unidad a la derecha en abscisas OX (en negro).
Como $g(x)=e^{1-x}=e\cdot e^{-x}$, sabemos que la gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de e^x pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY, y al estar multiplicada por *e*, está dilatada a lo largo de dicho eje OY. En concreto si $x = 0$, $g(0) = e$, por tanto un esbozo de dichas gráficas es



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $e^{x-1}=e^{1-x}\Rightarrow x-1=1-x\Rightarrow x=1$, con lo cual el punto de corte es $(1,1)$.

b) $A=\int_0^1\left(e^{1-x}-e^{x-1}\right)dx=\left[-e^{1-x}-e^{x-1}\right]_0^1=-1-1+e+\dfrac{1}{e}=-2+e+\dfrac{1}{e}\ u^2$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(x-3)^2$.
a) Calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f*.
b) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función $f(x)=x(x-3)^2=x(x^2-6x+9)=x^3-6x^2+9x$

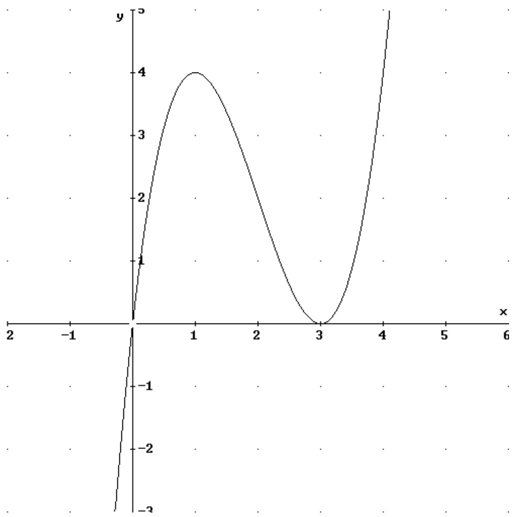
$$f'(x)=3x^2-12x+9=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=3$$

	$(-\infty,1)$	$(1,3)$	$(3,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo (1,4) $\downarrow$ mínimo (3,0)

b) Para hacer un esbozo de la gráfica calculamos los cortes con los ejes.

Puntos de corte (0, 0) y (3, 0)



c) $A=\int_0^3(x^3-6x^2+9x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+9\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}=\frac{27}{4}\ u^2$

Sea $I = \int \frac{2}{2-e^{x}}\,dx$.

a) Expresa *I* haciendo el cambio de variable $t = e^{x}$.

b) Calcula *I*.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{c} t = e^{x} \\ dt = e^{x}\,dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t} \end{array}\right\} I = \int \frac{2}{2-e^{x}}\,dx = \int \frac{2}{2-t}\cdot\frac{dt}{t}$$

b)

$$I = \int \frac{2}{2-e^{x}}\,dx = \int \frac{2}{2-t}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{A}{2-t}\,dt + \int \frac{B}{t}\,dt = -\ln(2-t) + \ln t = -\ln(2-e^{x}) + \ln e^{x} + C = x - \ln(2-e^{x}) + C$$

$$\frac{2}{2-t}\cdot\frac{1}{t} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{t} = \frac{A\cdot t + B(2-t)}{(2-t)\cdot t} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1 \\ t = 2 \Rightarrow 2 = 2A \Rightarrow A = 1 \end{cases}$$

Sea $f:(-2,0)\to\mathbb{R}$ la función definida mediante $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{x} & si \quad -2<x\leq -1\\ \dfrac{x^2-\beta}{2} & si \quad -1<x<0\end{cases}$

a) Determina α y β sabiendo que *f* es derivable.

b) Calcula $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para que sea derivable, primero tiene que ser continua en $x=-1$, luego:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{\alpha}{x}=\dfrac{\alpha}{-1}\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-\beta}{2}=\dfrac{1-\beta}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\alpha}{-1}=\frac{1-\beta}{2}\Rightarrow 2\alpha=-1+\beta\Rightarrow 2\alpha-\beta=-1$$

Estudiamos la derivabilidad de *f(x)* en $x=-1$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{\alpha}{x^2} & si \quad -2<x\leq -1\\ x & si \quad -1<x<0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(-1^-)=-\alpha\\ f'(-1^+)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior nos queda: $2\alpha-\beta=-1\Rightarrow 2-\beta=-1\Rightarrow \beta=3$

b)

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\,dx=\left[\ln x\right]_{-2}^{-1}=-\ln 2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\begin{cases} 1+\alpha x & si \quad x<0 \\ e^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

a) Determina el valor de α sabiendo que *f* es derivable.
b) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.
c) Calcula $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

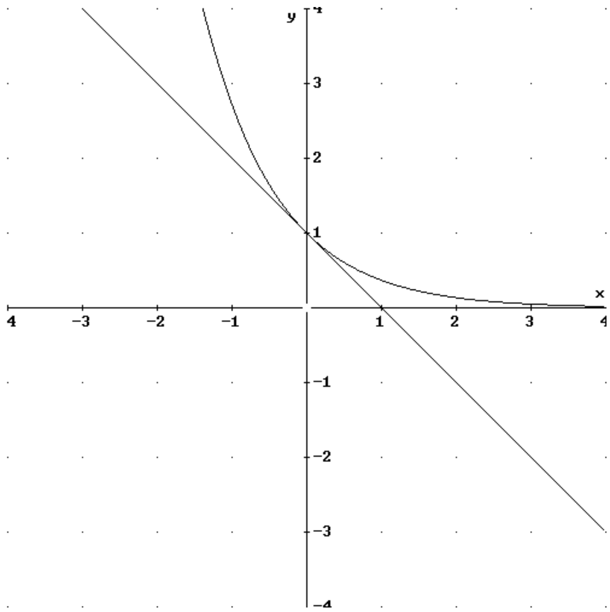
a) Estudiamos la derivabilidad de *f(x)* en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases} \alpha & si \quad x<0 \\ -e^{-x} & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\alpha \\ f'(0^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=-1$$

b) Para hacer un esbozo de la gráfica tenemos en cuenta que $1-x$ es una recta y con dos puntos nos basta para dibujarla, en concreto $(0,1)$ y $(-1,-2)$.

La gráfica de e^{-x} es exactamente igual que la de la exponencial e^{x} pero simétrica respecto al eje de ordenadas OY.
Un esbozo sería:



c)

$$\int_{-1}^{0}(1-x)\,dx+\int_{0}^{1}e^{-x}\,dx=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[-e^{-x}\right]_{0}^{1}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{e}+1=\frac{5}{2}-\frac{1}{e}$$

Calcula

a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\int \frac{3x+4}{x^2+1}\,dx=\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx+\int \frac{4}{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx+4\int \frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right|+4\,arc\,tg\,x+C$$

b) Calculamos primero la integral por partes

$$\int x\cdot\cos 2x\,dx=\frac{x\cdot sen\,2x}{2}-\frac{1}{2}\int sen\,2x\,dx=\frac{x\cdot sen\,2x}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=\cos 2x\,dx;\ v=\dfrac{1}{2}sen\,2x \end{array}}$$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x\,dx=\left[\frac{x\cdot sen\,2x}{2}+\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$$

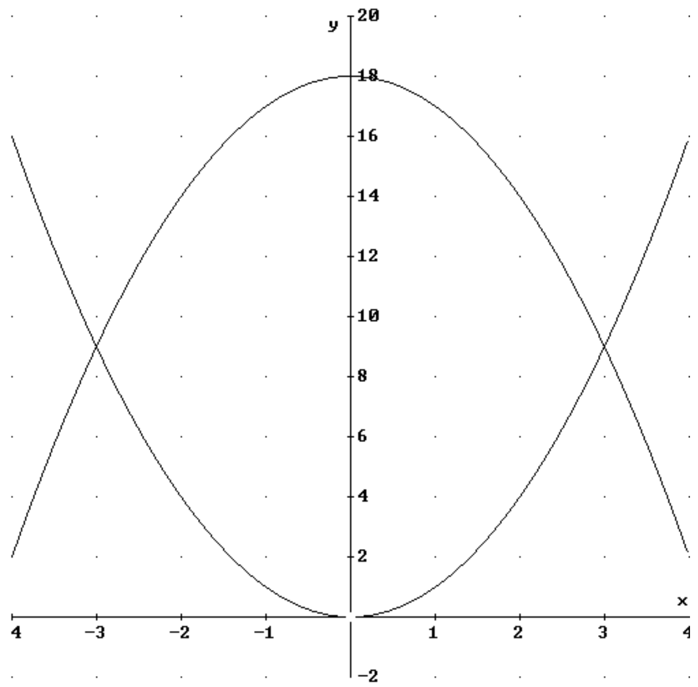
Calcula $\beta > 0$ para que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=-x^2+2\beta^2$$

sea 72 (unidades de área).
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

La gráfica de $f(x)=x^2$ es una parábola que tiene su vértice en (0,0) y las ramas hacia arriba.
Como $\beta > 0$, la gráfica de $g(x)=-x^2+2\beta^2$ es igual que la de $-x^2$ (como la de x^2 pero simétrica respecto el ej OX) pero desplazada hacia arriba $2\beta^2$ en OY. Aunque no lo piden las gráficas conjuntas son:



Para encontrar el punto de corte igualamos las funciones $x^2=-x^2+2\beta^2 \Rightarrow x=\beta \;;\; x=-\beta$.

$$72=\int_{-\beta}^{\beta}\left(-x^2+2\beta^2-x^2\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2\beta^2 x\right]_{-\beta}^{\beta}=-\frac{2}{3}\beta^3+2\beta^3-\frac{2}{3}\beta^3+2\beta^3=\frac{8}{3}\beta^3\Rightarrow\beta=3$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2$.
a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y el eje OX. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

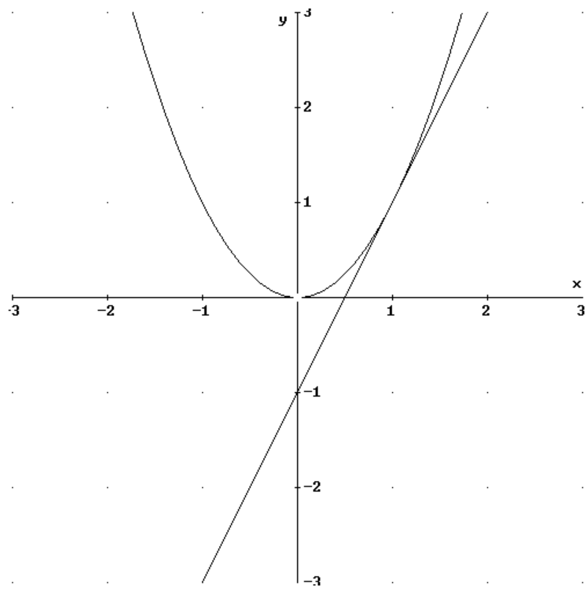
R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

- $f(1)=1$
- $f'(1)=2$

Luego, la recta tangente es: $y-1=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x-1$

b) Un esbozo de la gráfica de ambas funciones es:



Las funciones se cortan en el punto (1, 1)

El área pedida es:

$$A=\int_0^1 x^2\,dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1-\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{3}-1+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\,u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x|x-2|$.
a) Estudia la derivabilidad de *f* en $x=2$.
b) Esboza la gráfica de *f*.
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $f(x)=x|x-2|=\begin{cases}-x^2+2x & si \quad x\le 2\\ x^2-2x & si \quad x>2\end{cases}$

Las funciones $-x^2+2x$ y x^2-2x por ser polinómicas son continuas y derivables en $\mathbb{R}$. En el único punto donde puede haber problemas es en $x=2$, que es el punto donde cambiamos de una a otra. Vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=2$

Veamos la continuidad de *f(x)* en $x=2$:

1) $f(2)=0$

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}(-x^2+2x)=0\\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-2x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

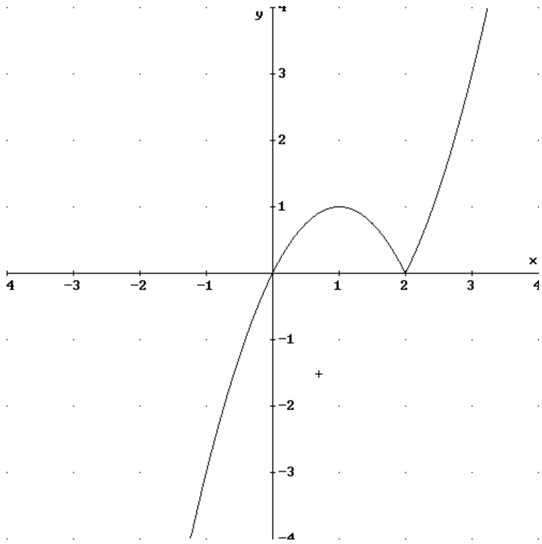
3) $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$

Por lo tanto, la función es continua en $x=2$

Estudiamos ya la derivabilidad de *f(x),* en particular en $x=2$

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+2 & si \quad x<2\\ 2x-2 & si \quad x>2\end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l}f'(2^-)=-2\\ f'(2^+)=\ \ 2\end{array}\right\}\Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+)\Rightarrow \text{ No derivable}$$

b)



c) El área pedida será: $A=\int_0^2 (-x^2+2x)\,dx=\left[-\dfrac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\left(-\dfrac{8}{3}+4\right)=\dfrac{4}{3}u^2$

Sea $f:(-1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=Ln(x+1)$. (Ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida en el apartado anterior y la recta $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

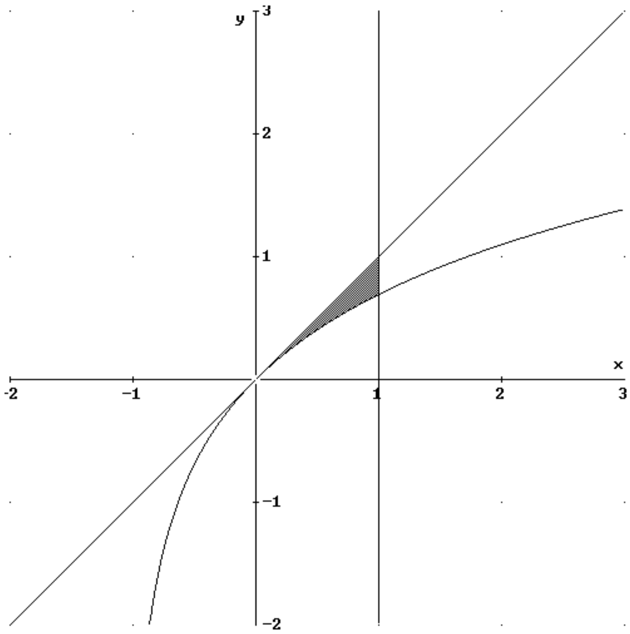
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=Ln1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f'(0)=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_0^1 (x-Ln(x+1))\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-xLn(x+1)+x-Ln(x+1)\right]_0^1=\frac{3}{2}-2Ln2\ u^2$$

$$\int Ln(x+1)\ dx=x\,Ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx=x\,Ln(x+1)-\int 1-\frac{1}{x+1}dx=x\,Ln(x+1)-x+Ln(x+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=Ln(x+1);\ du=\dfrac{1}{x+1}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$