PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2008

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

Calcula $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}$

MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Las raíces del denominador son: $x=0$; $x=1$; $x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x\cdot(x-1)\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=0\Rightarrow 1=A$$

$$x=1\Rightarrow 1=C$$

$$x=2\Rightarrow 1=A+2B+C\Rightarrow B=-1$$

Con lo cual:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x^2-x)(x-1)}=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}\,dx+\int_{-2}^{-1}\frac{-1}{x-1}\,dx+\int_{-2}^{-1}\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\left[\ln x-\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}\right]_{-2}^{-1}=\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=e^{-2x}$
a) Justifica que la recta de ecuación $y=-2ex$ es la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=-\dfrac{1}{2}$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta tangente del apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

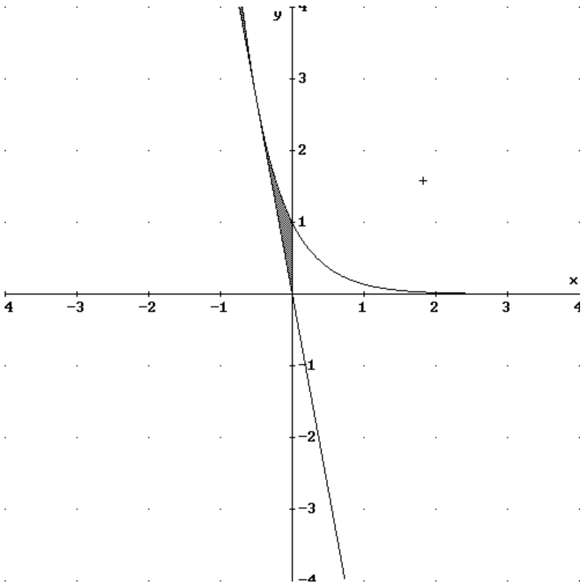
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=-\frac{1}{2}$ es $y-f\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=e$$
$$f'(x)=-2e^{-2x}\Rightarrow f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-e=-2e\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow y=-2ex$

b) Hacemos el dibujo



$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(e^{-2x}+2ex\right)dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{e}{2}+\frac{e}{4}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$
Se sabe que tiene un máximo local en $x=1$, que el punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de su gráfica y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{4}$.Calcula *a, b, c* y *d*.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \ ; \ f''(x)=6ax+2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 3a+2b+c=0$

- Punto de inflexión en $(0,1)\Rightarrow\begin{cases} Pasa\ \ por\ (0,1)\Rightarrow d=1\\ f''(0)=0\Rightarrow b=0\end{cases}$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{9}{4}\Rightarrow\int_0^1 (ax^3-3ax+1)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{3ax^2}{2}+x\right]_0^1=\frac{a}{4}-\frac{3a}{2}+1=\frac{9}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a=-1$; $b=0$; $c=3$; $d=1$

Dadas las funciones $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$$

calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{x} \Rightarrow x^3 = x^2 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 1$$

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12} \ u^2$$

Sea $g:(0,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\ln\ x$ (ln x denota logaritmo neperiano).

a) Justifica que la recta de ecuación $y=\frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa $x=e$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta tangente del apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 1. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

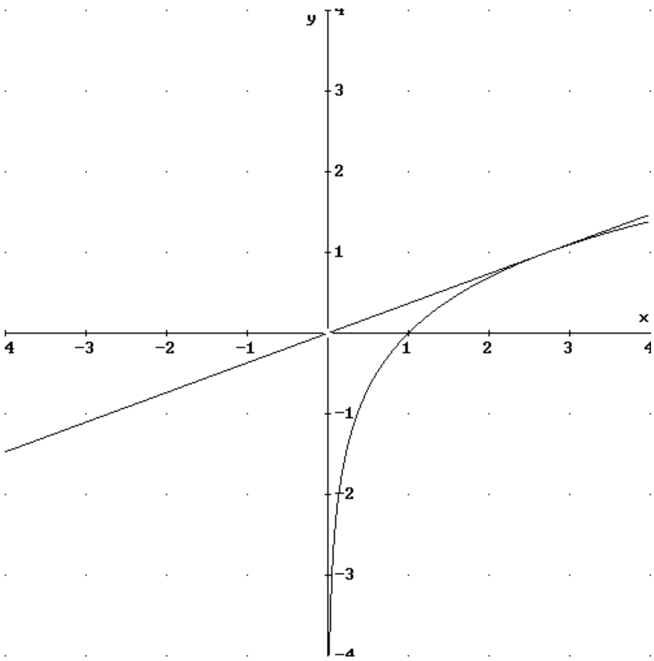
a) La recta tangente en $x=e$ es $y-g(e)=g'(e)\cdot(x-e)$

$$g(e)=Ln\,e=1$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow g'(e)=\frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=\frac{1}{e}\cdot(x-e)\Rightarrow y=\frac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_0^e\left(\frac{1}{e}x\right)dx-\int_1^e(\ln x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2e}\right]_0^e-\left[x\ln x-x\right]_1^e=\frac{e}{2}-1u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x)=x^3-4x \quad \text{y} \quad g(x)=3x-6$$

a) Determina los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte de dichas funciones

$$x^3-4x=3x-6 \Rightarrow x^3-7x+6=0 \Rightarrow x=2\ ;\ x=1\ ;\ x=-3$$

b)

$$A=\int_{-3}^{1}\left(x^3-7x+6\right)dx+\int_{1}^{2}\left(-x^3+7x-6\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{7x^2}{2}+6x\right]_{-3}^{1}+\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{7x^2}{2}-6x\right]_{1}^{2}=\frac{131}{4}\ u^2$$

Calcula $\int_0^1 x \ln(x+1)\, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x \cdot ln(x+1)\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(x+1);\ du = \dfrac{1}{x+1}\ dx \\ dv = x\,dx;\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$I = \int x \cdot ln(x+1)\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x+1)} dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x - \ln(x+1) \right) + C$$

Por lo tanto, la integral que nos piden es:

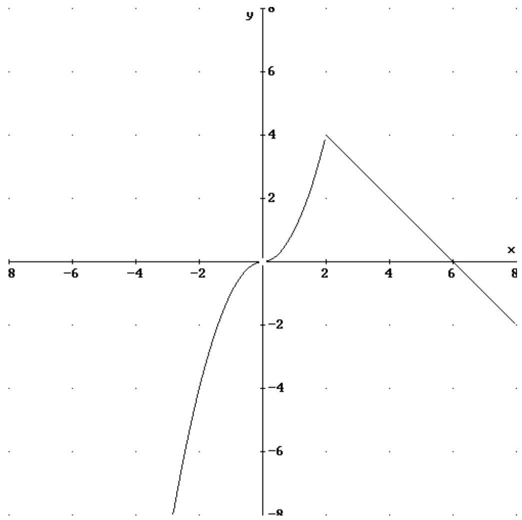
$$\int_0^1 x \ln(x+1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\begin{cases} x|x| & si \;\; x\le 2 \\ 6-x & si \;\; x>2 \end{cases}$

a) Esboza la gráfica de *f*.
b) Estudia la derivabilidad de *f*.
c) Calcula el área comprendida entre la gráfica de *f* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $f(x)=\begin{cases} x|x| & si \;\; x\le 2 \\ 6-x & si \;\; x>2 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 & si \;\; x<0 \\ x^2 & si \;\; 0\le x\le 2 \\ 6-x & si \;\; x>2 \end{cases}$



b) Por el dibujo vemos que la función es continua en $x=0$ y en $x=2$. Vamos a estudiar la derivabilidad en esos dos puntos.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & si \;\; x<0 \\ 2x & si \;\; 0<x<2 \\ -1 & si \;\; x>2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+)=0 \Rightarrow \text{Derivable en } x=0.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=\;\;4 \\ f'(2^+)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\ne f'(2^+)=0 \Rightarrow \text{No derivable en } x=2.$$

c) Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$A=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^6 (6-x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[6x-\frac{x^2}{2}\right]_2^6=\frac{8}{3}+(36-18)-(12-2)=\frac{32}{3}\;u^2$$

Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x)=x^2 \quad \text{y} \quad g(x)=a \quad (\text{con } a>0)$$

Se sabe que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones *f* y *g* es $\frac{4}{3}$. Calcula el valor de la constante *a*.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como $a>0$, la gráfica de $g(x)=a$ es un recta paralela al eje OX y por encima de él. La gráfica de $f(x)$ es una parábola con vértice en (0,0) y ramas hacia arriba.

Como el área encerrada por el recinto es $\frac{4}{3}$, y sabemos que la recta $g(x)=a$ es mayor que cero, tenemos que

$$A=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=\left(a\sqrt{a}-\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right)-\left(-a\sqrt{a}+\frac{(\sqrt{a})^3}{3}\right)=$$

$$=2a\sqrt{a}-2\frac{(\sqrt{a})^3}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 4a\sqrt{a}=4\Rightarrow a^3=1\Rightarrow a=1$$

Calcula $\int_{1}^{e} x^2 \ln x\, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x^2 \cdot ln\, x\ dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x;\ \ du = \dfrac{1}{x}\ dx \\ dv = x^2\ dx;\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{array}}$$

$$I = \int x^2 \cdot ln\, x\, dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\ x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x} dx = \frac{x^3}{3} \cdot ln\ x - \frac{1}{9} x^3 + C$$

Por lo tanto, la integral que nos piden es:

$$\int_{1}^{e} x^2 \ln x\, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_{1}^{e} = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

Considera las funciones $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=\frac{sen\,x}{\cos^3 x} \quad \text{y} \quad g(x)=x^3\ln x$$

a) Halla la primitiva de f que tima el valor 1 cuando $x=\frac{\pi}{3}$.

(Se puede hacer el cambio de variable $t=\cos x$).

b) Calcula $\int g(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) $t=\cos x\Rightarrow dt=-sen\,x\,dx$

$$F(x)=\int\frac{sen\,x}{\cos^3 x}\,dx=-\int\frac{dt}{t^3}=-\int t^{-3}dt=\frac{t^{-2}}{2}=\frac{1}{2t^2}=\frac{1}{2\cos^2 x}+C$$

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{3}}+C\Rightarrow 1=\frac{1}{\frac{1}{2}}+C\Rightarrow C=-1$$

Luego, $F(x)=\dfrac{1}{2\cos^2 x}-1$

b)

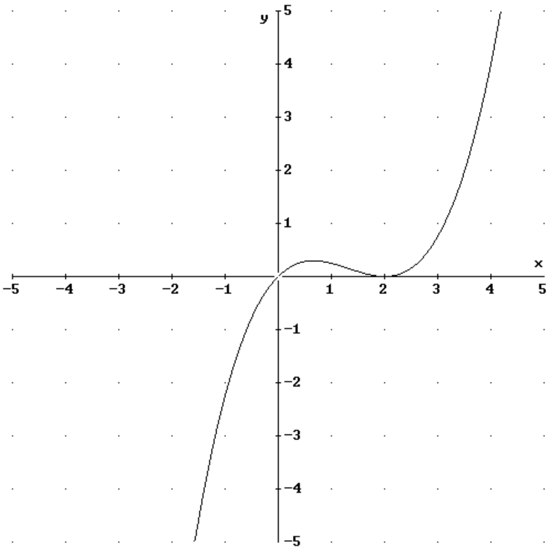
$$\int x^3\cdot\ln x\,dx=\frac{x^4\cdot\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4x}dx=\frac{x^4\cdot\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x^3dx;\ v=\dfrac{x^4}{4}\end{array}}$$

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función dada por $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$.
a) Esboza la gráfica de *g*.
b) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *g* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *g* y el eje de abscisas.
MATEMÁTICAS II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) La recta tangente en $x=2$ es $y-g(2)=g'(2)\cdot(x-2)$

$$g(2)=0$$
$$g'(x)=\frac{3x^2}{4}-2x+1\Rightarrow g'(2)=0$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=0\cdot(x-2)\Rightarrow y=0$

c)

$$A=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3-x^2+x\right)dx=\left[\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{3}\ u^2$$

Dada la función $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=2x+\left|x^2-1\right|$.

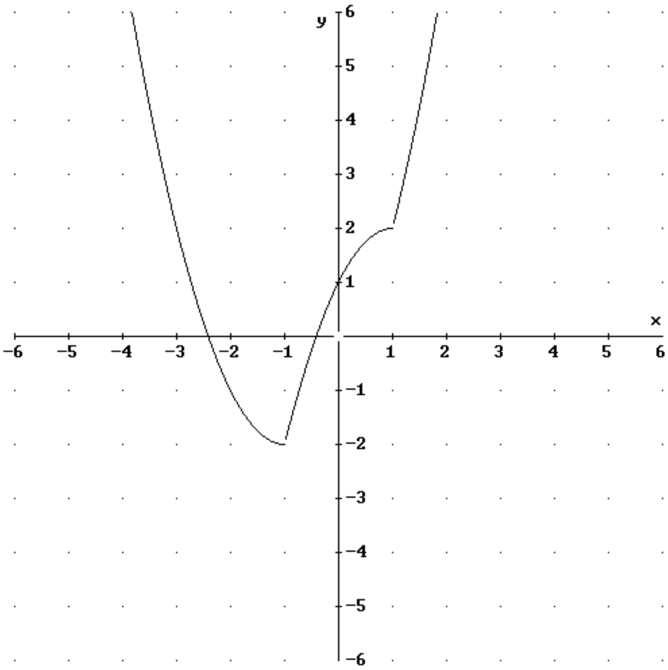
a) Esboza la gráfica de *g*.

c) Calcula $\int_0^2 g(x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función. $g(x)=2x+\left|x^2-1\right|=\begin{cases} x^2+2x-1 & si \quad x<-1 \\ -x^2+2x+1 & si \quad -1\le x\le 1 \\ x^2+2x-1 & si \quad x>1 \end{cases}$



b)

$$\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^1(-x^2+2x+1)\,dx+\int_1^2(x^2+2x-1)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-x\right]_1^2=6$$

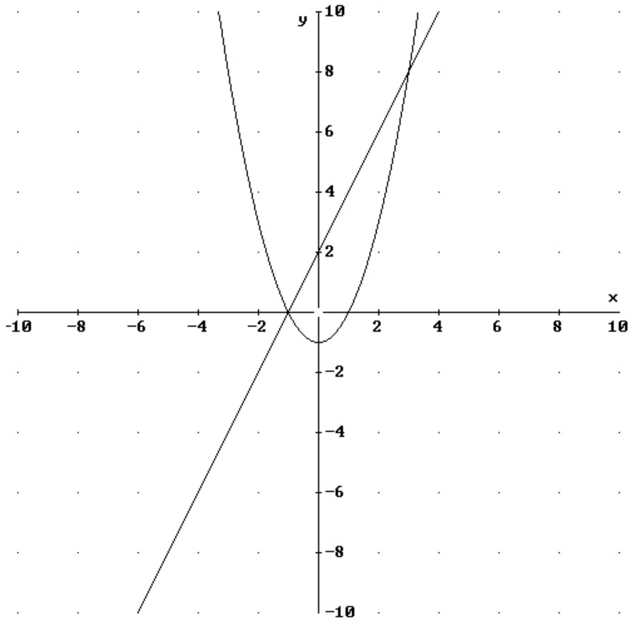
Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ **las funciones definidas por**

$$f(x)=x^2-1\ ,\ g(x)=2x+2$$

a) Esboza las gráficas de *f* y *g*.
b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.
MATEMÁTICAS II. 2008. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) El área pedida es:

$$A=\int_{-1}^{3}(2x+2-x^2+1)\,dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_{-1}^{3}=\frac{32}{3}\ u^2$$