

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = x|x-1|$ .

a) Esboza la gráfica de  $f$ .

b) Comprueba que la recta de ecuación  $y = x$  es la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 0$ .

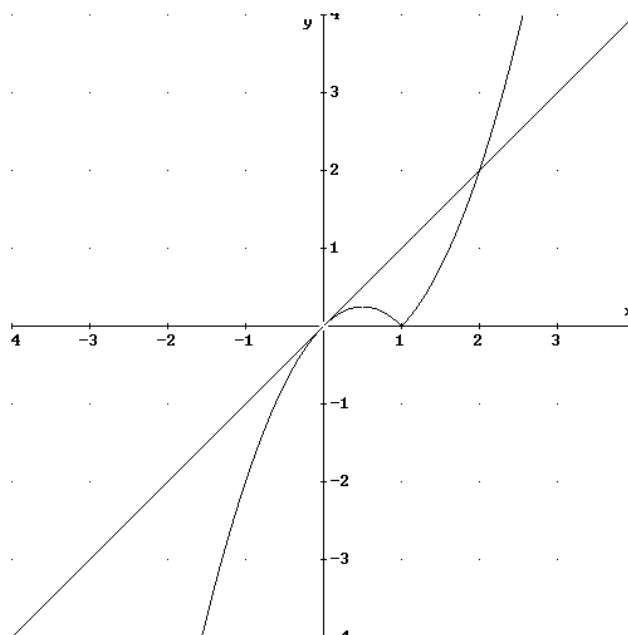
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y la de dicha tangente.

MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función y dibujarla

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



b) La ecuación de la recta tangente será:  $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es:  $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$

c)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 [(x) - (-x^2 + x)] dx + \int_1^2 [(x) - (x^2 - x)] dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[ -\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 = 1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Considera la curva de ecuación  $y = x^3 - 3x$ .

a) Halla la recta tangente a la curva en el punto de abscisa  $x = -1$ .

b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta  $y = 2$ .

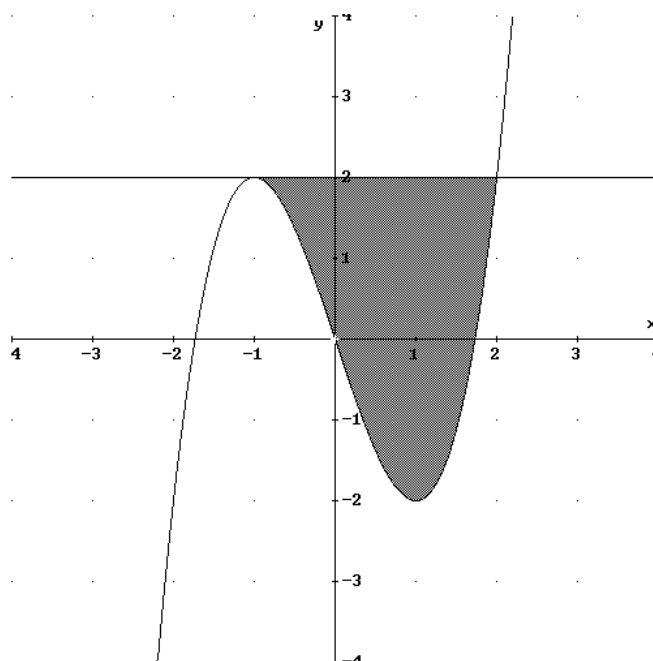
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

### RESOLUCIÓN

a)

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow m = y'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 0 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 2$$

b)



Por lo tanto, el área pedida será:

$$A = \int_{-1}^2 (2 - x^3 + 3x) dx = \left[ 2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^2 = 4 - 4 + 6 + 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4} u^2$$

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = 6 - x^2$

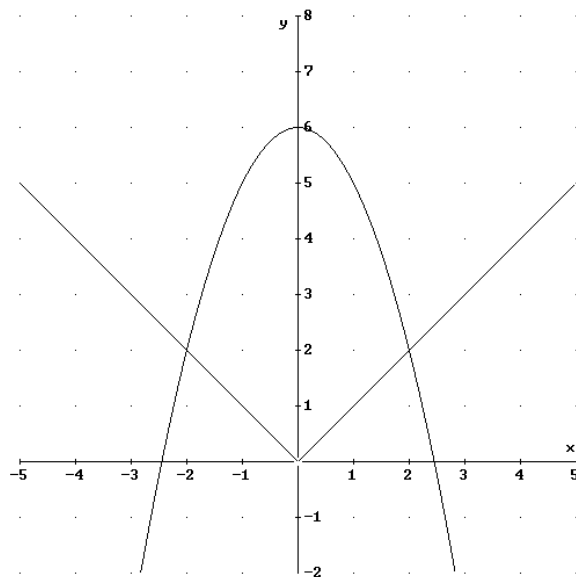
a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

### RESOLUCIÓN

a)



b)

$$- A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \cdot \left[ 6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3} u^2$$

La recta tangente a la gráfica de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = mx^2 + nx - 3$ , en el punto  $(1, -6)$ , es paralela a la recta de ecuación  $y = -x$

a) Determina las constantes  $m$  y  $n$ . Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

## R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada:  $f'(x) = 2mx + n$

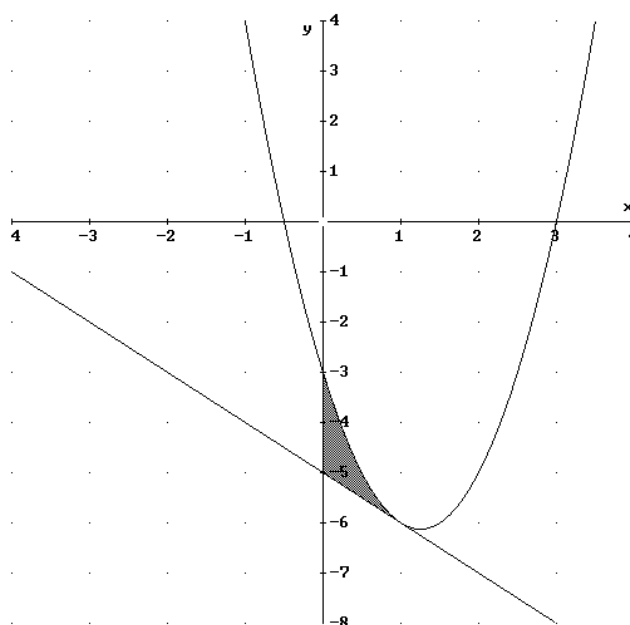
- Pasa por  $(1, -6) \Rightarrow f(1) = -6 \Rightarrow m \cdot 1^2 + n \cdot 1 - 3 = -6$

- Tangente paralela a  $y = -x \Rightarrow f'(1) = -1 \Rightarrow 2m \cdot 1 + n = -1$

Resolviendo el sistema, tenemos que:  $m = 2$  ;  $n = -5 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

La ecuación de la tangente será:  $y + 6 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow x + y + 5 = 0$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_0^1 \left( (2x^2 - 5x - 3) - (-x - 5) \right) dx = \int_0^1 (2x^2 - 4x + 2) dx = \left[ \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{2}{3} u^2$$

Sea  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = 1 + \ln(x)$ , siendo  $\ln$  la función logaritmo neperiano.

a) Comprueba que la recta de ecuación  $y = 1 + \frac{1}{e}x$  es la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = e$ .

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$ , el eje de abscisas y la recta tangente obtenida en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

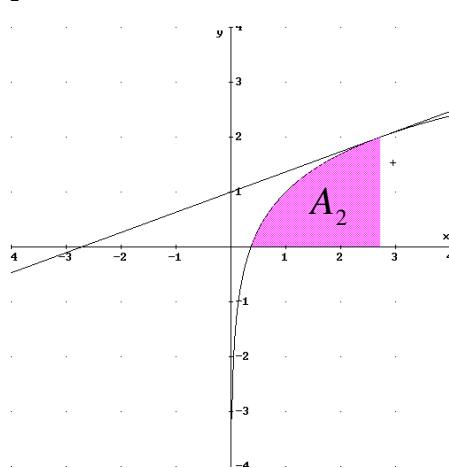
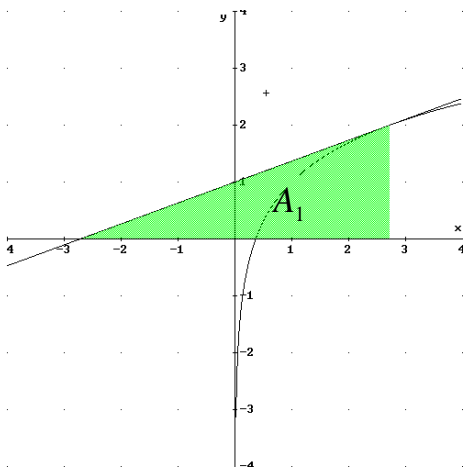
a) La recta tangente en  $x = e$  es  $y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e)$

$$f(e) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 2 = \frac{1}{e} \cdot (x - e) \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es:  $A = A_1 - A_2$



$$\int 1 + \ln(x) \, dx = x(1 + \ln(x)) - \int \frac{x}{x} \, dx = x + x \ln(x) - x = x \ln(x)$$

$$u = 1 + \ln(x); \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

$$A_1 = \int_{-e}^e \left(1 + \frac{x}{e}\right) dx = \left[ x - \frac{x^2}{2e} \right]_{-e}^e = 2e \, u^2$$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{e}}^e (1 + \ln(x)) \, dx = [x \ln(x)]_{\frac{1}{e}}^e = \frac{e^2 + 1}{e} \, u^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 2e - \frac{e^2 + 1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} \, u^2$$

Se consideran las funciones  $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = \sqrt{3x}$  y

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

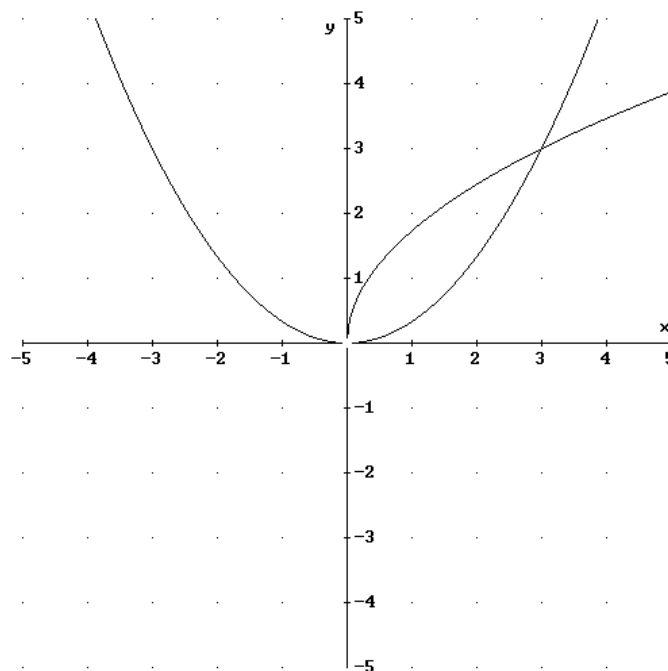
a) Haz un esbozo de sus gráficas

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

## RESOLUCIÓN

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



b) En el dibujo vemos que los puntos de corte son el  $(0,0)$  y  $(3,3)$ . Luego, el área que nos piden es:

$$A = \int_0^3 \left[ \sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2 \right] dx = \left[ \frac{2\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_0^3 = 3 \text{ u}^2$$

a) Calcula  $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$

b) Sean las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por:

$$f(x) = -x^2 + 1 \quad ; \quad g(x) = x - 1$$

Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

## RESOLUCIÓN

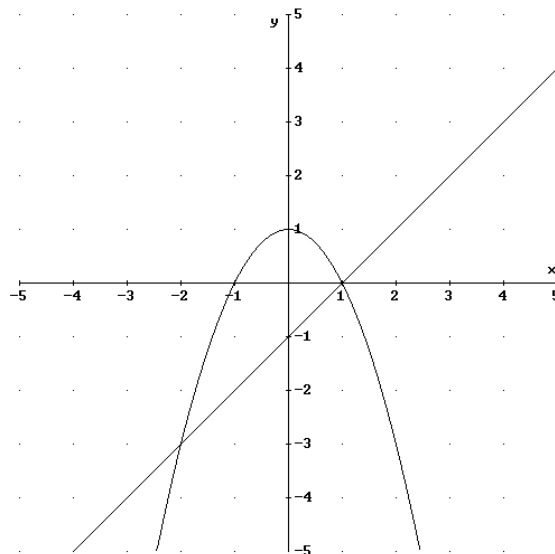
a) Calculamos la integral por partes

$$\int x \cdot \text{sen } x \, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen } x + C$$

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \text{sen } x \, dx; \quad v = -\cos x$$

b)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad ; \quad x = -2$$

El área que nos piden es:

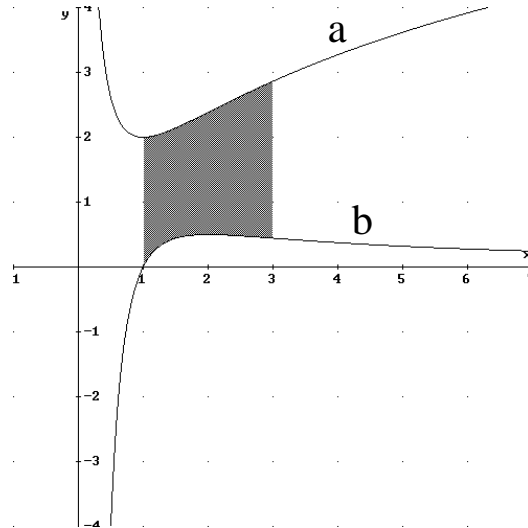
$$A = \int_{-2}^1 [(-x^2 + 1) - (x - 1)] \, dx = \int_{-2}^1 [-x^2 - x + 2] \, dx = \left[ -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2} u^2$$



Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\ln(x)$$

y a la de su derivada  $f' : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$



- a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de  $f$  y cuál la de  $f'$ .  
 b) Calcula el área de la región sombreada.

**MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$$

Vemos que esta función corta al eje X en el punto (1,0). Luego la gráfica de  $f$  es la (a) y la gráfica de  $f'$  es la (b)

b) Calculamos la integral por partes:  $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx; \quad v = x$$

El área que nos piden es:

$$A = \int_1^3 \left[ \frac{2}{x} + 2\ln(x) + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} \right] dx = \int_1^3 \left[ 2\ln(x) + \frac{2}{x^2} \right] dx = \left[ 2x \ln x - 2x - \frac{2}{x} \right]_1^3 = \frac{18\ln 3 - 8}{3}$$

Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones definidas por:  $f(x) = x^2 + |x|$  ;  $g(x) = 2$

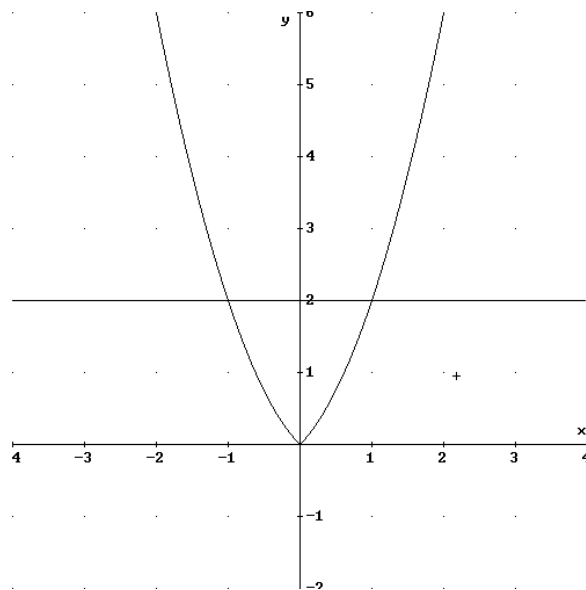
a) Determina los puntos de corte de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Esboza dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a)



$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -1. \text{ Sólo } x = -1 \text{ está en el intervalo}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -2. \text{ Sólo } x = 1 \text{ está en el intervalo}$$

Luego, los puntos de corte son:  $(-1, 2)$  y  $(1, 2)$

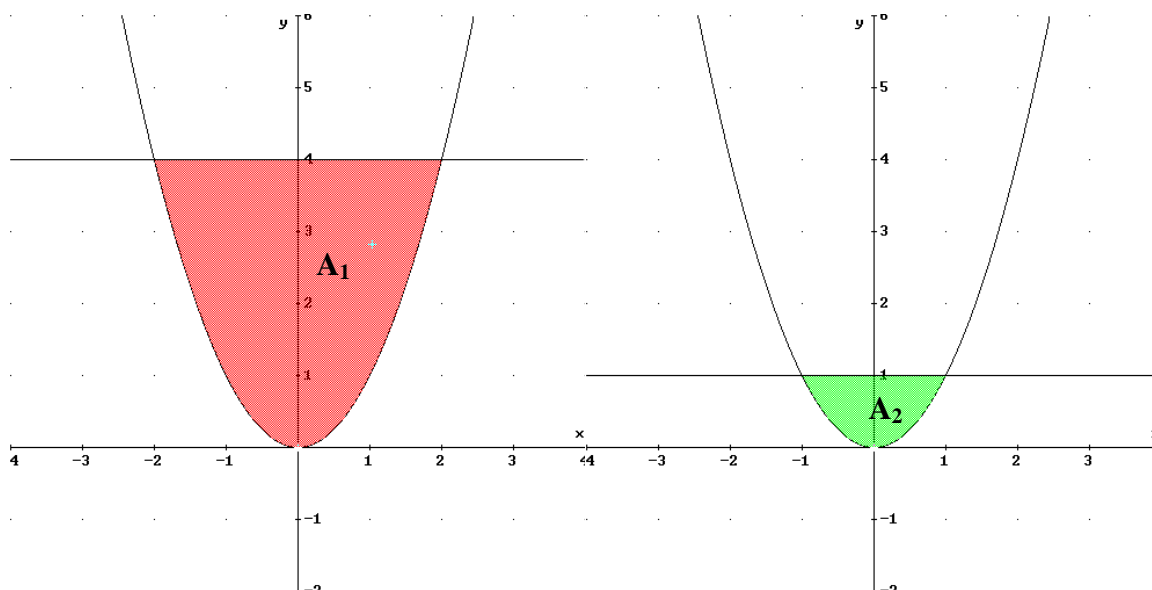
b)

$$A = 2 \int_{-1}^0 (2 - x^2 + x) dx = \left[ 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3} u^2$$

Calcula un número positivo  $a$ , menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación  $y = x^2$  y las dos rectas de ecuaciones  $y = 4$  e  $y = a$ , tenga un área de  $\frac{28}{3}$  unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

### RESOLUCIÓN



Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -2$$

$$A_1 = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} ; x = -\sqrt{a}$$

$$A_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$$A = A_1 - A_2 \Rightarrow \frac{28}{3} = \frac{32}{3} - \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1$$

La curva  $y = \frac{1}{2}x^2$  divide al rectángulo de vértices  $A = (0,0)$ ,  $B = (2,0)$ ,  $C = (2,1)$  y  $D = (0,1)$  en dos recintos.

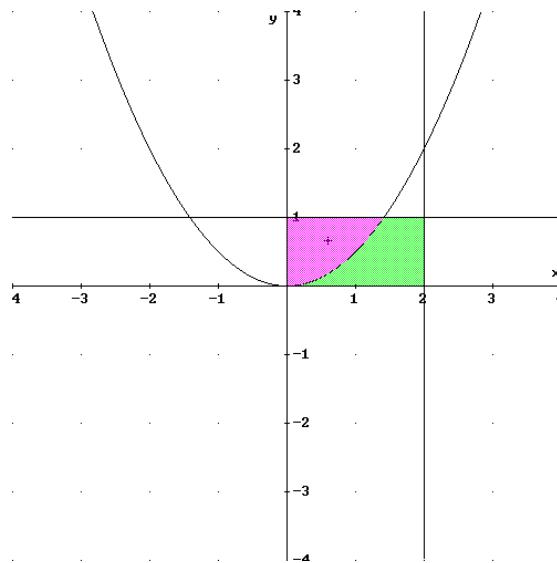
a) Dibuja dichos recintos.

b) Halla el área de cada uno de ellos

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

Calculamos el punto de corte de la parábola con la recta  $y = 1$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = +\sqrt{2}$$

El área del primer recinto es:

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[ x - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3} u^2$$

Sea  $f$  la función definida por  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$ .

Halla la primitiva  $F$  de  $f$  que cumple  $F(0) = 3$ . (Sugerencia: utiliza el cambio de variable  $t = \frac{3}{2}x^2$ ).

**MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es  $t = \frac{3}{2}x^2$ , vamos a calcular cuanto vale  $dx$ :

$$t = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow dt = 3x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{3}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}} dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{\sqrt{4-9\frac{4t^2}{9}}} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} t + C = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} \frac{3x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Como  $F(0) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} 0 + C \Rightarrow C = 3$

Por lo tanto,  $F(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} \frac{3x^2}{2} + 3$