

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x|x-1|$.

a) Esboza la gráfica de f .

b) Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

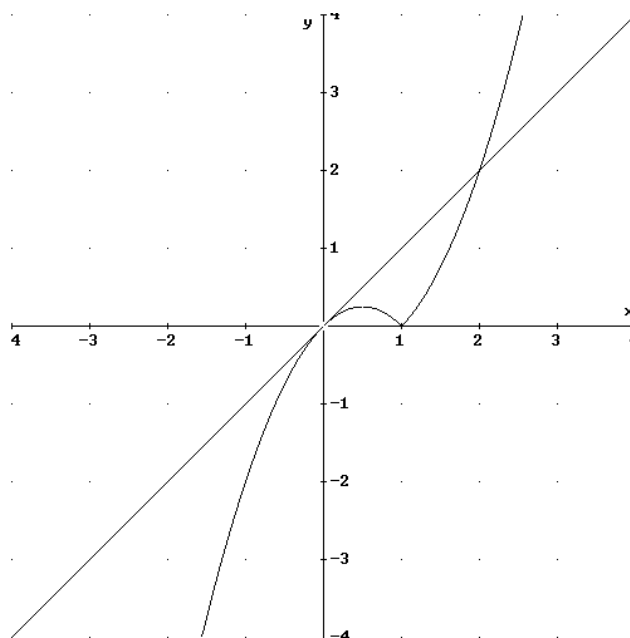
c) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la de dicha tangente.

MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función y dibujarla

$$f(x) = x|x-1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



b) La ecuación de la recta tangente será: $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

luego, sustituyendo, tenemos que la recta tangente es: $y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x$

c)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^1 [(x) - (-x^2 + x)] dx + \int_1^2 [(x) - (x^2 - x)] dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 = 1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Considera la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$.

a) Halla la recta tangente a la curva en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la curva dada y la recta $y = 2$.

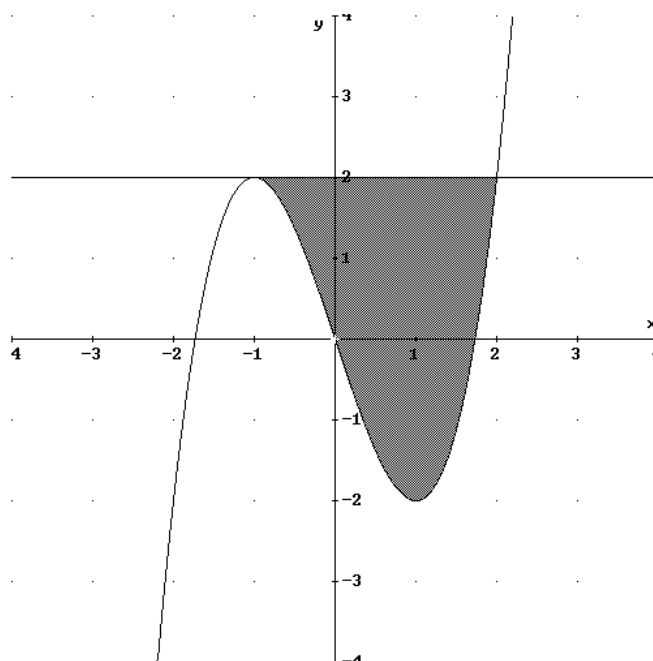
MATEMÁTICAS II. 2009. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

RESOLUCIÓN

a)

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow m = y'(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = 0 \cdot (x + 1) \Rightarrow y = 2$$

b)



Por lo tanto, el área pedida será:

$$A = \int_{-1}^2 (2 - x^3 + 3x) dx = \left[2x - \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^2 = 4 - 4 + 6 + 2 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{27}{4} u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 6 - x^2$

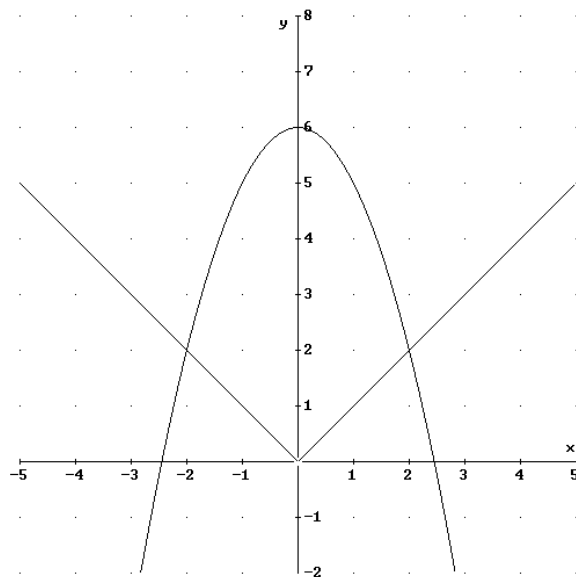
a) Esboza el recinto limitado por sus gráficas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a)



b)

$$- A = 2 \cdot \int_0^2 (6 - x^2 - x) dx = 2 \cdot \left[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 24 - \frac{16}{3} - 4 = \frac{44}{3} u^2$$

La recta tangente a la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx^2 + nx - 3$, en el punto $(1, -6)$, es paralela a la recta de ecuación $y = -x$

a) Determina las constantes m y n . Halla la ecuación de dicha recta tangente.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función, la recta tangente anterior y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada: $f'(x) = 2mx + n$

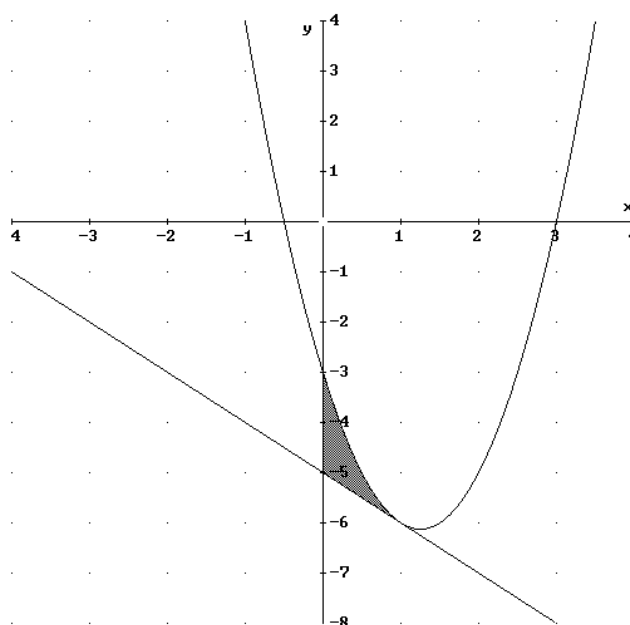
- Pasa por $(1, -6) \Rightarrow f(1) = -6 \Rightarrow m \cdot 1^2 + n \cdot 1 - 3 = -6$

- Tangente paralela a $y = -x \Rightarrow f'(1) = -1 \Rightarrow 2m \cdot 1 + n = -1$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $m = 2$; $n = -5 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 5x - 3$

La ecuación de la tangente será: $y + 6 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow x + y + 5 = 0$

b) El área de la región pedida es:



$$A = \int_0^1 \left((2x^2 - 5x - 3) - (-x - 5) \right) dx = \int_0^1 (2x^2 - 4x + 2) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2x \right]_0^1 = \frac{2}{3} u^2$$

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 1 + \ln(x)$, siendo \ln la función logaritmo neperiano.

a) Comprueba que la recta de ecuación $y = 1 + \frac{1}{e}x$ es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f , el eje de abscisas y la recta tangente obtenida en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

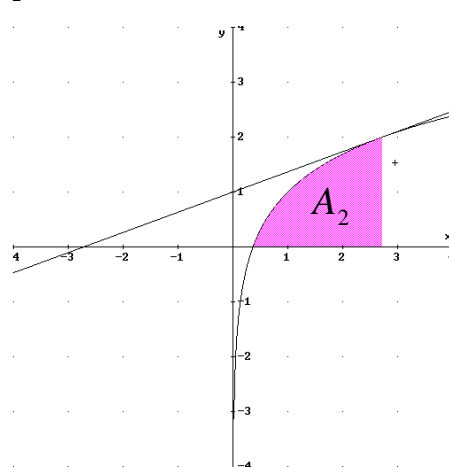
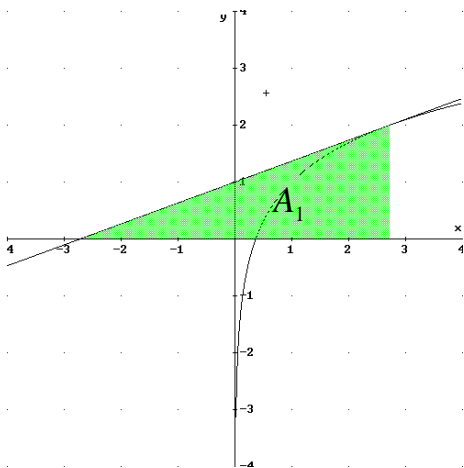
a) La recta tangente en $x = e$ es $y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e)$

$$f(e) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{1}{e}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 2 = \frac{1}{e} \cdot (x - e) \Rightarrow y = 1 + \frac{1}{e}x$

b) El área de la región pedida es: $A = A_1 - A_2$



$$\int 1 + \ln(x) dx = x(1 + \ln(x)) - \int \frac{x}{x} dx = x + x \ln(x) - x = x \ln(x)$$

$$u = 1 + \ln(x); du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = dx; v = x$$

$$A_1 = \int_{-e}^e \left(1 + \frac{x}{e}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{2e} \right]_{-e}^e = 2e u^2$$

$$A_2 = \int_{\frac{1}{e}}^e (1 + \ln(x)) dx = [x \ln(x)]_{\frac{1}{e}}^e = \frac{e^2 + 1}{e} u^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 2e - \frac{e^2 + 1}{e} = \frac{e^2 - 1}{e} u^2$$

Se consideran las funciones $f : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \sqrt{3x}$ y

$$g(x) = \frac{1}{3}x^2$$

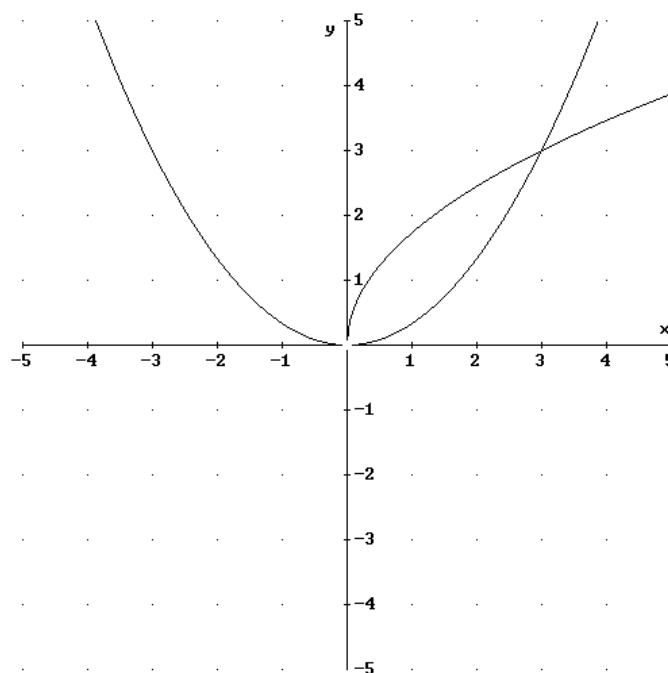
a) Haz un esbozo de sus gráficas

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



b) En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(3,3)$. Luego, el área que nos piden es:

$$A = \int_0^3 \left[\sqrt{3x} - \frac{1}{3}x^2 \right] dx = \left[\frac{2\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{9} \right]_0^3 = 3 \text{ u}^2$$

a) Calcula $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$

b) Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = -x^2 + 1 \quad ; \quad g(x) = x - 1$$

Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

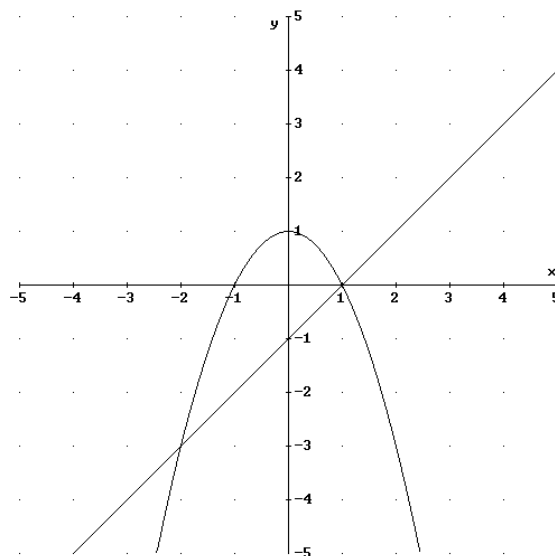
a) Calculamos la integral por partes

$$\int x \cdot \text{sen } x \, dx = -x \cdot \cos x - \int -\cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen } x + C$$

$$u = x; \quad du = dx$$

$$dv = \text{sen } x \, dx; \quad v = -\cos x$$

b)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 1 \\ y = x - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad ; \quad x = -2$$

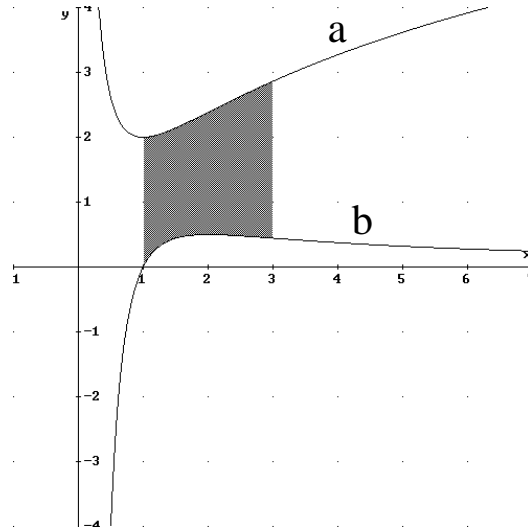
El área que nos piden es:

$$A = \int_{-2}^1 [(-x^2 + 1) - (x - 1)] \, dx = \int_{-2}^1 [-x^2 - x + 2] \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2} u^2$$

Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2}{x} + 2\ln(x)$$

y a la de su derivada $f' : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$



- a) Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de f y cuál la de f' .
 b) Calcula el área de la región sombreada.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la función derivada.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$$

Vemos que esta función corta al eje X en el punto (1,0). Luego la gráfica de f es la (a) y la gráfica de f' es la (b)

b) Calculamos la integral por partes: $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

| |
|--|
| $u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} \, dx$ $dv = dx; \quad v = x$ |
|--|

El área que nos piden es:

$$A = \int_1^3 \left[\frac{2}{x} + 2\ln(x) + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} \right] dx = \int_1^3 \left[2\ln(x) + \frac{2}{x^2} \right] dx = \left[2x \ln x - 2x - \frac{2}{x} \right]_1^3 = \frac{18\ln 3 - 8}{3}$$

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = x^2 + |x|$; $g(x) = 2$

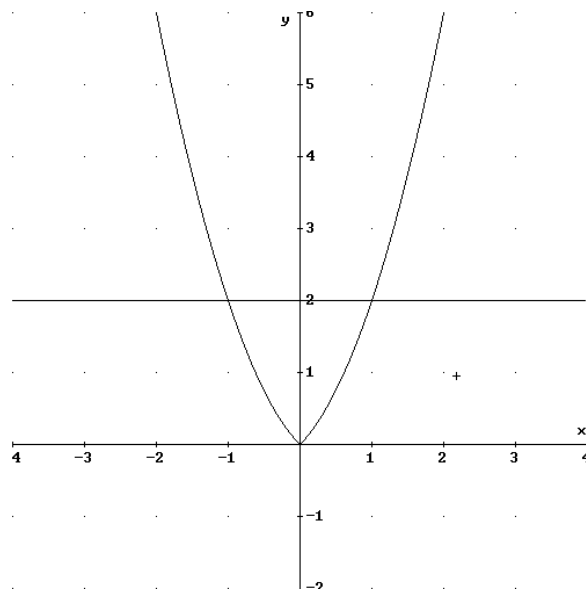
a) Determina los puntos de corte de las gráficas de f y g . Esboza dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por dichas gráficas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -1. \text{ Sólo } x = -1 \text{ está en el intervalo}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + x \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -2. \text{ Sólo } x = 1 \text{ está en el intervalo}$$

Luego, los puntos de corte son: $(-1, 2)$ y $(1, 2)$

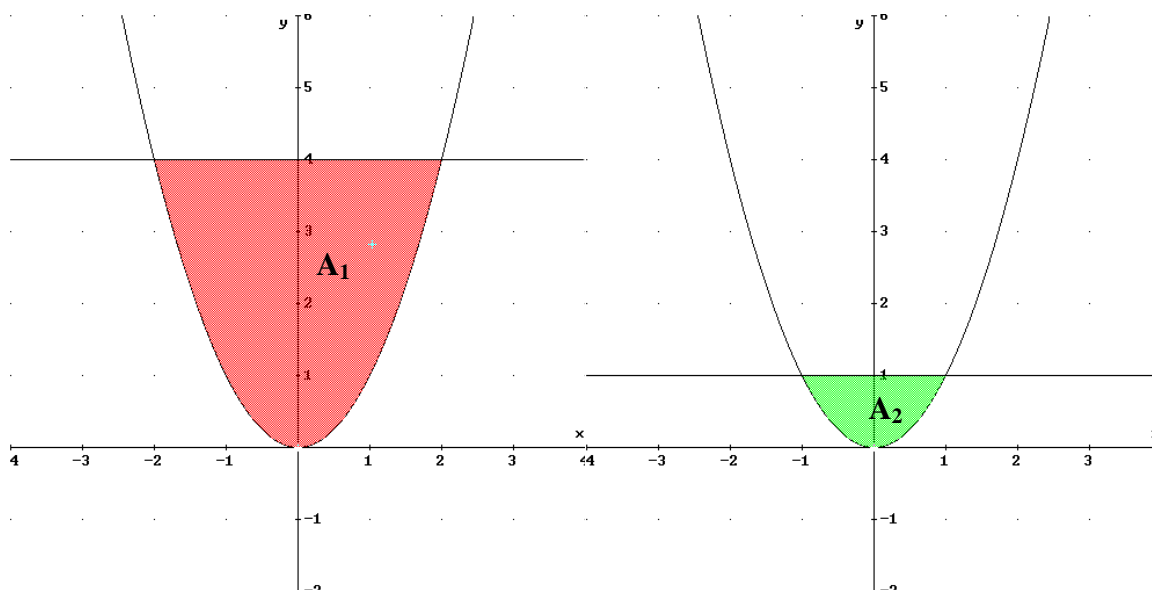
b)

$$A = 2 \int_{-1}^0 (2 - x^2 + x) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 = 2 \cdot \frac{7}{6} = \frac{7}{3} u^2$$

Calcula un número positivo a , menor que 4, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y = x^2$ y las dos rectas de ecuaciones $y = 4$ e $y = a$, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2009. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

RESOLUCIÓN



Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -2$$

$$A_1 = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} ; x = -\sqrt{a}$$

$$A_2 = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} (a - x^2) dx = \left[ax - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} = \frac{4a\sqrt{a}}{3}$$

$$A = A_1 - A_2 \Rightarrow \frac{28}{3} = \frac{32}{3} - \frac{4a\sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{4a\sqrt{a}}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 1$$

La curva $y = \frac{1}{2}x^2$ divide al rectángulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (2,1)$ y $D = (0,1)$ en dos recintos.

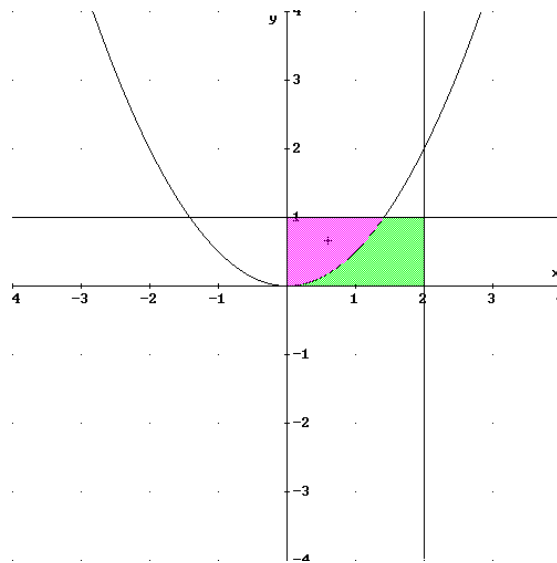
a) Dibuja dichos recintos.

b) Halla el área de cada uno de ellos

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

RESOLUCIÓN

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

Calculamos el punto de corte de la parábola con la recta $y = 1$

$$\left. \begin{array}{l} y = 1 \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = +\sqrt{2}$$

El área del primer recinto es:

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2 = 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{3} u^2$$

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$.

Halla la primitiva F de f que cumple $F(0) = 3$. (Sugerencia: utiliza el cambio de variable $t = \frac{3}{2}x^2$).

MATEMÁTICAS II. 2009. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t = \frac{3}{2}x^2$, vamos a calcular cuanto vale dx :

$$t = \frac{3}{2}x^2 \Rightarrow dt = 3x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{3}$$

Sustituyendo, nos queda:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{4-9x^4}} dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{\sqrt{4-9\frac{4t^2}{9}}} = \int \frac{\frac{dt}{3}}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} t + C = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} \frac{3x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Como $F(0) = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} 0 + C \Rightarrow C = 3$

Por lo tanto, $F(x) = \frac{1}{6} \operatorname{arc sen} \frac{3x^2}{2} + 3$