PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2015

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Calcula $\displaystyle\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = \int -1\,dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$; $x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow -1=3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$
$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)}\,dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)}\,dx =$$

$$= -x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x+2| + C$$

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$. (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Integramos, por partes, para calcular $f'(x)$

$$f'(x)=\int \ln(x)\ dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x);\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Volvemos a integrar, por partes, para calcular $f(x)$

$$f(x)=\int (x\ln x - x + C)\ dx = \int x\ln x\,dx-\int x\,dx+\int C\,dx=\int x\ln x\,dx-\frac{x^2}{2}+Cx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx-\frac{x^2}{2}+Cx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+Cx+D=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+Cx+D$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x);\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=xdx;\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Calculamos el valor de las constantes *C* y *D*.

Tangente horizontal $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 0=1\cdot\ln 1-1+C\Rightarrow C=1$

Pasa por el punto $(1,2)\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow 2=\dfrac{1\cdot\ln 1}{2}-\dfrac{3}{4}+1+D\Rightarrow D=\dfrac{7}{4}$

Luego, la primitiva que nos piden es: $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{3x^2}{4}+x+\dfrac{7}{4}$

Calcula $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ **(Sugerencia** $\sqrt{x+2}=t$ **)**

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{x+2}$, vamos a calcular cuánto vale *dx* y *x*:

$$dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+2}}dx\Rightarrow dx=2\cdot\sqrt{x+2}\,dt=2t\,dt$$
$$t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow x=t^2-2$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-2-2)\cdot t}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-4)\cdot t}=\int\frac{2dt}{(t^2-4)}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t^2-4}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t-2}=\frac{A(t-2)+B(t+2)}{t^2-4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t=2\Rightarrow 2=4B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$
$$t=-2\Rightarrow 2=-4A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int\frac{2dt}{(t^2-4)}=\int\frac{Adt}{t+2}+\int\frac{Bdt}{t-2}=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C$$

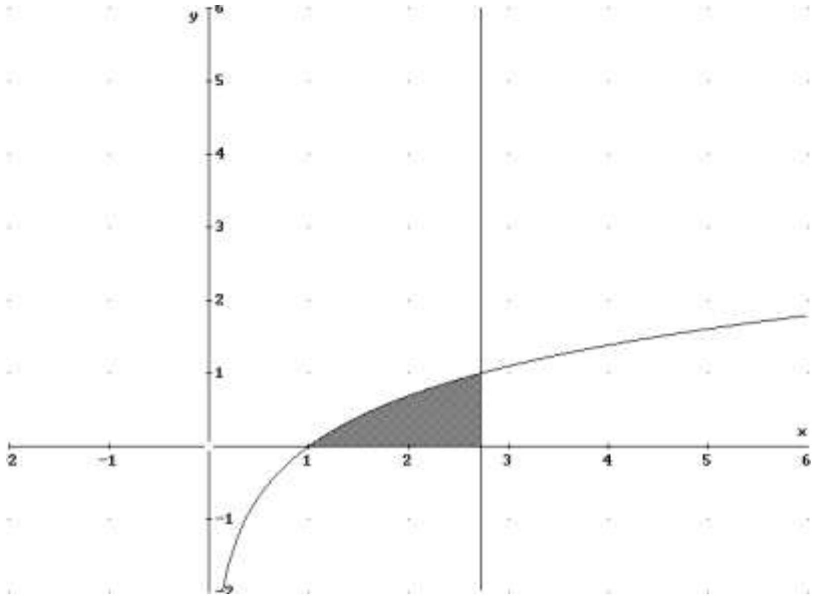
Deshacemos el cambio de variable:

$$\int\frac{2dt}{(t^2-4)}=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right|+C$$

Sea g la función definida por $g(x)=\ln(x)$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de $a>1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de *g*, el eje de abscisas y la recta $x=a$ es 1.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El recinto es:



Calculamos el área.

$$A=\int_1^a \ln x\,dx$$

Hacemos la integral por partes:

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}} \quad \int \ln x\ dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$$

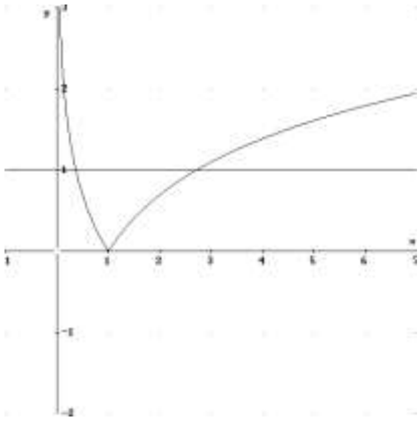
$$A=\int_1^a \ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^a=(a\ln a-a)-(1\ln 1-1)=a\ln a-a+1=1 \Rightarrow a\ln a-a=0 \Rightarrow \ln a=1 \Rightarrow e^1=a$$

Luego: $a=e$

Sea f la función definida por $f(x)=|\ln(x)|$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=1$.
b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y=1$.
c) Calcula el área del recinto citado.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x|=1\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\ -\ln x=1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[1-(-\ln x)\right]\,dx+\int_{1}^{e}\left[1-(\ln x)\right]\,dx=\left[x+x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x-x\ln x+x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{e}+e-2\ u^2$$

Recuerda que la integral de ln$x$ es por partes:

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l}u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx\\ dv=dx;\ v=x\end{array}}$$

Calcula $\int e^{2x}\, sen(x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos la integral por partes.

$$\int e^{2x}\cdot sen\,x\,dx = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\int e^{2x}\cdot\cos x\,dx = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\left[e^{2x}\cdot sen\,x - 2\int e^{2x}\cdot sen\,x\,dx\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = e^{2x}\ ;\ du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = sen\,x\,dx\ ;\ v = -\cos x \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = e^{2x}\ ;\ du = 2e^{2x}\,dx \\ dv = \cos x\,dx\ ;\ v = sen\,x \end{array}}$$

$$I = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\left[e^{2x}\cdot sen\,x - 2\cdot I\right]$$

$$I + 4I = -e^{2x}\cdot\cos x + 2e^{2x}\cdot sen\,x$$

$$I = \frac{-e^{2x}\cdot\cos x + 2e^{2x}\cdot sen\,x}{5} + C$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y sea *F* la primitiva de *f* tal que $F(1)=2$.
a) Calcula $F'(e)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x)=\int f(x)\ dx$, y además: $F'(x)=f(x)$.
Por lo tanto:

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$$

b) Calculamos $F(x)$. Para ello hacemos el cambio de variable $\ln x=t$, con lo cual $\ln x=t\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$

$$F(x)=\int\frac{\ln x}{2x}\ dx=\int\frac{t}{2}\ dt=\frac{t^2}{4}+C=\frac{(\ln x)^2}{4}+C$$

Como $F(1)=2\Rightarrow\frac{(\ln 1)^2}{4}+C=2\Rightarrow C=2$

Por lo tanto: $F(x)=\frac{(\ln x)^2}{4}+2$

Calculamos la recta tangente que nos piden: $y-F(e)=F'(e)\cdot(x-e)$

$$F(e)=\frac{(\ln e)^2}{4}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$$

Luego, la recta tangente es: $y-\frac{9}{4}=\frac{1}{2e}\cdot(x-e)$

Sean $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=\sqrt{2x}$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

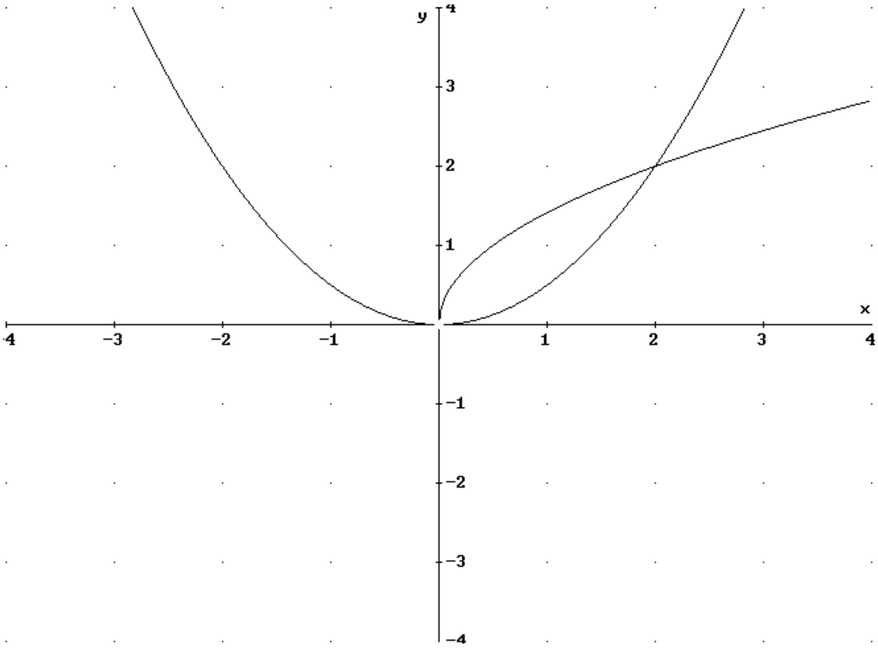
a) Halla los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Haz un esbozo del recinto que limitan.

b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(2,2)$.

b) Luego, el área que nos piden es:

$$A=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right]dx=\left[\frac{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}\,u^2$$

Calcula el valor de $a > 1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + ax \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + (1-a)x = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; ; \;\; x = a-1$$

Calculamos el área:

$$A = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{a-1} = -\frac{(a-1)^3}{3} + \frac{a(a-1)^2}{2} - \frac{(a-1)^2}{2} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini, sale que $a = 3$

Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 1$ y sea F la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $P(2,\ln 2)$ (ln denota logaritmo neperiano).
a) Calcula la recta tangente a la gráfica de F en el punto P.
b) Determina la función F.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x)=\int f(x)\,dx$, y además: $F'(x)=f(x)$.
Calculamos la recta tangente que nos piden: $y-F(2)=F'(2)\cdot(x-2)$

$$F(2)=\ln 2$$
$$F'(2)=f(2)=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$$

Luego, la recta tangente es: $y-\ln 2=\dfrac{5}{4}\cdot(x-2)$

b) Calculamos $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx$

Las raíces del denominador son: $x=0$; $x=0$; $x=1$
Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\cdot x\cdot(x-1)+B(x-1)+C\cdot x^2}{x^2\cdot(x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $x=2$

$$x=0\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$$
$$x=1\Rightarrow 2=C\Rightarrow C=2$$
$$x=2\Rightarrow 5=2A+B+4C\Rightarrow A=-1$$

Con lo cual:

$$F(x)=\int\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx=\int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x^2}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx=-\ln x+\frac{1}{x}+2\ln(x-1)+C$$

Como $F(x)$ pasa por el punto $(2,\ln 2)$ entonces: $\ln 2=-\ln 2+\dfrac{1}{2}+2\ln 1+C\Rightarrow C=2\ln 2-\dfrac{1}{2}$

Por lo tanto: $F(x)=-\ln x+\dfrac{1}{x}+2\ln(x-1)+2\ln 2-\dfrac{1}{2}$

Calcula $\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2 sen(x)\, dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2 sen(x)\, dx=-x^2\cdot\cos x+2\int x\cdot\cos x\, dx=-x^2\cdot\cos x+2\cdot\left[x\cdot sen\, x-\int sen\, x\, dx\right]=$$
$$=-x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\, x+2\cos x+C$$

$u=x^2;\ du=2x\ dx$
$dv=sen\, x\, dx;\ v=-\cos x$

$u=x;\ du=dx$
$dv=\cos x\, dx;\ v=sen\, x$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\, dx=\left[-x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\, x+2\cos x\right]_0^{\pi}=$$
$$=\left(-\pi^2\cdot\cos\pi+2\pi\cdot sen\,\pi+2\cos\pi\right)-\left(-0^2\cdot\cos 0+2\cdot 0\cdot sen\, 0+2\cos 0\right)=$$
$$=\pi^2-2-2=\pi^2-4$$

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$

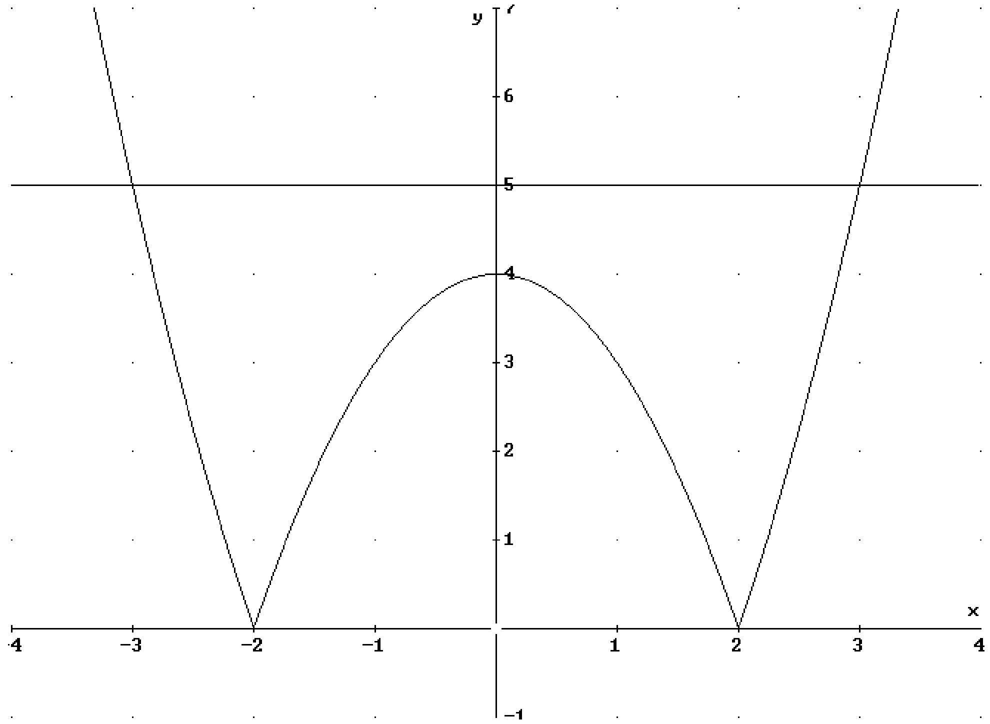
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y = 5$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si \quad x < -2 \\ -x^2 + 4 & si \quad -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & si \quad x > 2 \end{cases}$, y hacemos el dibujo



b) Vemos por el dibujo que es simétrica respecto el eje OY, luego:

$$A = 2\left[\int_0^2 (5 + x^2 - 4)\,dx + \int_2^3 (5 - x^2 + 4)\,dx\right] = 2\left[\int_0^2 (1 + x^2)\,dx + \int_2^3 (9 - x^2)\,dx\right] =$$

$$= 2\left(\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_2^3\right) = 2\left(\left[2 + \frac{8}{3}\right] + \left[27 - \frac{27}{3}\right] - \left[18 - \frac{8}{3}\right]\right) = \frac{44}{3}\ u^2$$