PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2017

MATEMÁTICAS II

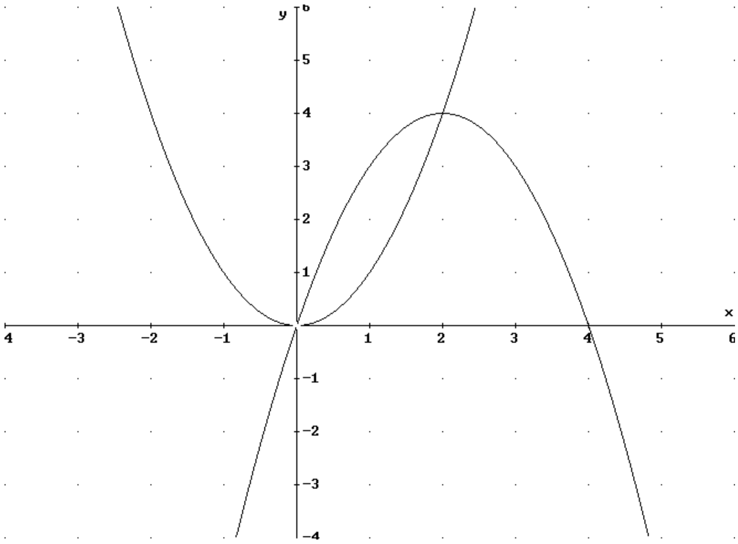
TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$
a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.
b) Expresa el área como una integral.
c) Calcula el área.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones son parábolas y podemos dibujarlas dibujarla fácilmente con una tabla de valores.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 2$$

Las dos funciones se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 \left((-x^2 + 4x) - (x^2)\right) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) \ dx$$

c) Calculamos el área

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_0^2 = \left(-\frac{16}{3} + \frac{16}{2} \right) - (0) = \frac{8}{3} \ u^2$$

Calcula $\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (*sugerencia* $t=\sqrt[4]{x}$).

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow t^4 = x$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$4t^3 dt = dx$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=1 \Rightarrow t=\sqrt[4]{1}=1$$

$$x=16 \Rightarrow t=\sqrt[4]{16}=2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_{1}^{2} \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = \int_{1}^{2} \frac{4t^2 dt}{t+1}$$

Hacemos la división de los dos polinomios, con lo cual:

$$\int_{1}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_{1}^{2} \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = \int_{1}^{2} \frac{4t^2 dt}{t+1} = \int_{1}^{2} \left(4t-4+\frac{4}{t+1}\right) dt = \left[2t^2-4t+4\ln|t+1|\right]_{1}^{2} =$$

$$= (8-8+4\ln 3) - (2-4+4\ln 2) = 2+4\ln\frac{3}{2} = 3'62$$

Considera la función dada por $f(x)=\sqrt{3+|x|}$ para $x\in[-3,3]$.
a) Expresa la función *f* definida a trozos.
b) Halla $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función

$$f(x)=\sqrt{3+|x|}=\begin{cases}\sqrt{3-x} & si \quad -3\le x\le 0\\ \sqrt{3+x} & si \quad 0<x\le 3\end{cases}$$

b) Calculamos la integral

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}\sqrt{3-x}\,dx+\int_{0}^{3}\sqrt{3+x}\,dx=\int_{-3}^{0}(3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx+\int_{0}^{3}(3+x)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{2(3+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{0}^{3}=8\sqrt{6}-4\sqrt{3}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\,arc\,tg(x)$. Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,\pi)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral por partes

$$F(x)=\int x\,arc\,tg\,x\;dx=\frac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\frac{1}{2}\left[\int 1dx+\int\frac{-1}{1+x^2}dx\right]=$$
$$=\frac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arc\,tg\,x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=arc\,tg\,x;\;\; du=\dfrac{1}{1+x^2}\;dx \\ dv=xdx;\; v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Calculamos el valor de la constante *C*.

$$F(0)=\pi\Rightarrow\pi=0-0+0+C\Rightarrow C=\pi$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}arc\,tg\,x+\pi$

Sea *f* la función definida como $f(x)=(x+2)\ \ln(x)$ para $x>0$, donde $\ln(x)$ representa al logaritmo neperiano de *x*.

a) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) Encuentra la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$u=\ln x;\ \ du=\frac{1}{x}\,dx$$
$$dv=(x+2)\,dx;\ v=\frac{x^2}{2}+2x$$

$$I=\int (x+2)\cdot \ln x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot \ln x-\int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot \ln x-\frac{1}{4}x^2-2x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,0)$.

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot \ln x-\frac{1}{4}x^2-2x+C\Rightarrow 0=\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot \ln 1-\frac{1}{4}-2+C\Rightarrow C=\frac{9}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot \ln x-\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{9}{4}$

a) Halla $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ (sugerencia $t=1+x^3$).
b) Halla la primitiva cuya gráfica pasa por $(2,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t=1+x^3$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$3x^2dx=dt \Rightarrow dx=\frac{dt}{3x^2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int \frac{\frac{dt}{3}}{t^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{3}{2}}\,dt=\frac{1}{3}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]=-\frac{2}{3t^{\frac{1}{2}}}=-\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}}+C$$

b) Hallamos la primitiva que pasa por el punto $(2,0)$.

$$F(x)=-\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}}+C \Rightarrow F(2)=-\frac{2}{3\sqrt{1+2^3}}+C=0 \Rightarrow C=\frac{2}{9}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt{1+x^3}}+\dfrac{2}{9}$

Sea $I = \int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,dx$

a) Expresa ***I*** **aplicando el cambio de variable** $t = 2+\sqrt{x+1}$**.**

b) Calcula el valor de ***I*****.**

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t = 2+\sqrt{x+1} \Rightarrow \sqrt{x+1} = t-2 \Rightarrow$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = dt \Rightarrow dx = 2(t-2)\,dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x = 8 \Rightarrow t = 2+\sqrt{8+1} = 5$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 2+\sqrt{0+1} = 3$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I = \int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,dx = \int_3^5 \frac{1}{t}\cdot 2(t-2)dt = 2\int_3^5 \frac{(t-2)}{t}dt = 2\int_3^5 \left(1-\frac{2}{t}\right)dt$$

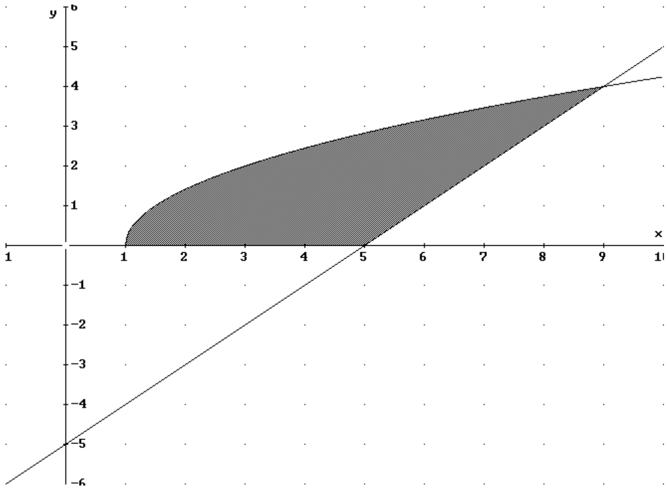
b) Calculamos el valor de *I*:

$$I = 2\int_3^5 \left(1-\frac{2}{t}\right)dt = 2\left[t-2\ln t\right]_3^5 = 2\left[5-2\ln 5\right]-2\left[3-2\ln 3\right] = 4+4\ln\frac{3}{5}$$

Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x)=\sqrt{2x-2}$ para $x\ge 1$, la recta $y=x-5$ y el eje de abscisas.
a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de *f* y las rectas.
b) Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.
c) Calcula el área.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo del recinto:



Calculamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{2x-2} \\ y=x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2x-2}=x-5 \Rightarrow 2x-2=x^2+25-10x \Rightarrow x^2-12x+27=0 \Rightarrow x=9$$

Luego, se cortan en el punto: $(9,4)$

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{2x-2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2x-2}=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

Luego, se cortan en el punto: $(1,0)$

b) $A=\int_1^5\left(\sqrt{2x-2}-0\right)\,dx+\int_5^9\left(\sqrt{2x-2}-x+5\right)\,dx$

c) Calculamos el área

$$A=\int_1^5\left(\sqrt{2x-2}-0\right)\,dx+\int_5^9\left(\sqrt{2x-2}-x+5\right)\,dx=\left[\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^5+\left[\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^2}{2}+5x\right]_5^9=\frac{40}{3}\,u^2$$

Calcula $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ (sugerencia $t=\sqrt[3]{x}$)

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3$

$dx=3t^2\,dt$

Calculamos los nuevos límites de integración: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=3 \Rightarrow t=\sqrt[3]{3}$

Con lo cual:

$$I=\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{1+t}3t^2dt=3\int_0^{\sqrt[3]{3}}\left(\frac{t^2}{1+t}\right)dt=3\int_0^{\sqrt[3]{3}}\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=3\cdot\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_0^{\sqrt[3]{3}}=$$

$$=3\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{2}-\sqrt[3]{3}+\ln(1+\sqrt[3]{3})\right]$$

Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{2x}{(x+1)^2}\right) dx = [x]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right) dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x=-1\,;\; x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos el valor de la raíz y otro valor en los dos numeradores

$x=-1 \Rightarrow -1 = B$
$x=0 \Rightarrow 0 = A+B \Rightarrow 0 = A-1 \Rightarrow A=1$

Con lo cual:

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx = [x]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right) dx = [x]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right) dx - 2\int_0^1 \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right) dx =$$

$$= [x]_0^1 - 2\left[\ln(x+1)\right]_0^1 + 2\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = 1-2\ln 2 - 1 + 2 = 2-2\ln 2$$

Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cdot e^{x}$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces, por partes, para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int x\cdot e^{x}dx=x\cdot e^{x}-\int e^{x}dx=x\cdot e^{x}-e^{x}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{x}dx;\ v=e^{x} \end{array}}$$

$$f(x)=\int\left(x\cdot e^{x}-e^{x}+C\right)dx=x\cdot e^{x}-e^{x}-e^{x}+Cx+D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(0,0)\Rightarrow 0-e^{0}-e^{0}+o+D=0\Rightarrow D=2$

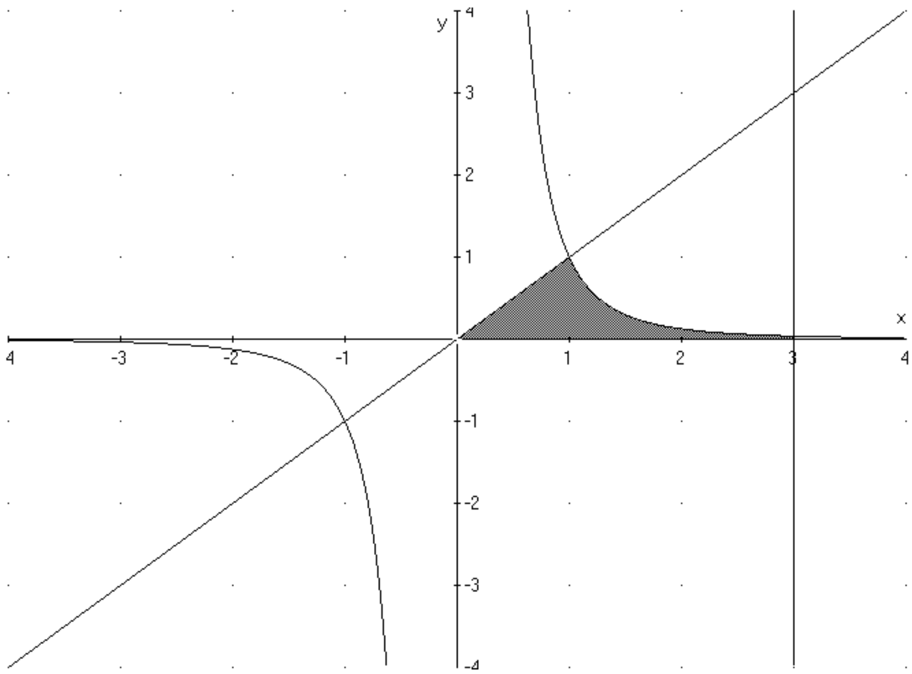
- Extremo relativo en $x=1\ \Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow e-e+C=0\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=x\cdot e^{x}-2e^{x}+2$

Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y = x$, la gráfica $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.
a) Haz un esbozo del recinto descrito.
b) Calcula el área del recinto
c) Si consideras la gráfica $y = \frac{1}{x}$ en lugar de $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial.?. ¿Por qué?
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo del recinto



b) Calculamos el área del recinto

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (x-0)\,dx + \int_1^3 \left(\frac{1}{x^3} - 0\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{17}{18}\ u^2$$

c) Será mayor. Ya que $A_2 = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^3} - 0\right) dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \frac{4}{9}\ u^2$

y si utilizamos la función $\frac{1}{x}$, entonces: $A_2 = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - 0\right) dx = \left[\ln x\right]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = 1'09\ u^2$