PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2018

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = \left| x^2 - 2x \right|$.

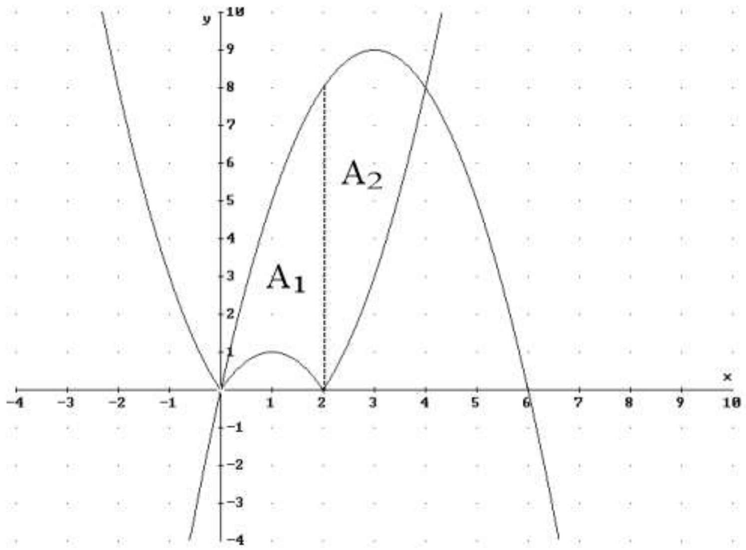
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $f(x) = 6x - x^2$ que es una parábola, calculando el vértice y haciendo una tabla de valores. Abrimos la función $g(x) = \left| x^2 - 2x \right| = \begin{cases} x^2 - 2x & si \ \ x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & si \ \ 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 \left[(6x - x^2) - (-x^2 + 2x) \right] dx + \int_2^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 4x \, dx + \int_2^4 (-2x^2 + 8x) \, dx = \left[2x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = 8 + \left(-\frac{128}{3} + 64 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{56}{3} \ u^2$$

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de g. Determina el punto de tangencia con la gráfica de g.

b) Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de f y g. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

En el examen original había un error. Las gráficas estaban cambiadas, es decir, *f* era *g* y *g* era *f*.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la tangente es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1)$

Calculamos: $f(1) = 3 - 1^2 = 2$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

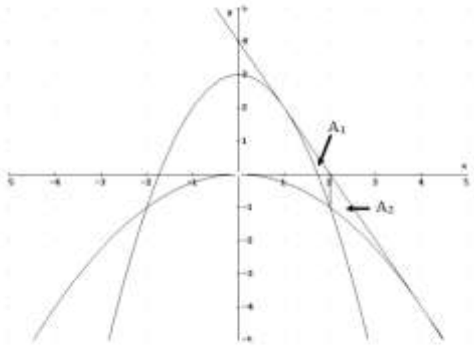
Sustituimos y calculamos la tangente: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \Rightarrow y - 2 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x + 4$

Comprobamos que también es tangente a g

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= -\frac{x^2}{4} \\ y &= -2x+4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -2x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Luego, es tangente y el punto de tangencia es $(4, -4)$.

b) Hacemos el dibujo de las dos parábolas y la recta.



Los puntos de corte son: $(1,2)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ y $(4,-4)$

c) Calculamos el área que nos piden.

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 \left[(-2x+4) - (3-x^2)\right] dx + \int_2^4 \left[(-2x+4) - \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right] dx =$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)\, dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + \left(\frac{64}{12} - 16 + 16\right) - \left(\frac{8}{12} - 4 + 8\right) = 1 \; u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{2-x}$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta $x+y=3$.
c) Calcula el área del recinto indicado.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

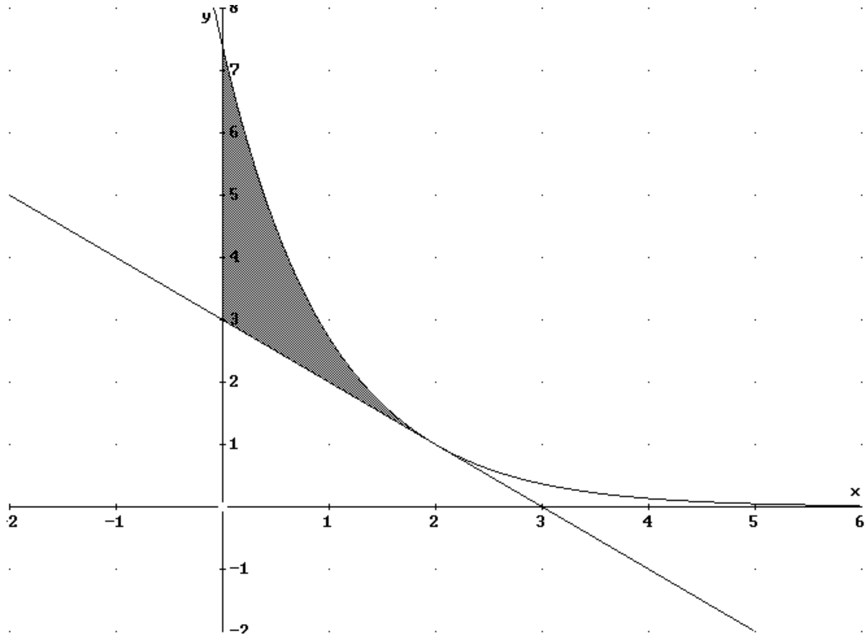
R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

- $f(2)=e^0=1$
- $f'(x)=-e^{2-x}\Rightarrow f'(2)=-e^0=-1$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-1=-1\cdot(x-2)\Rightarrow y=-x+3$

b) Dibujamos el recinto que nos dicen.



c) Calculamos el área del recinto

$$\int_0^2\left[(e^{2-x})-(-x+3)\right]dx=\int_0^2(e^{2-x}+x-3)\,dx=\left[-e^{2-x}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^2=\left(-e^0+2-6\right)-\left(-e^2\right)=e^2-5\ u^2$$

Considera la función $f:\left(-\dfrac{e}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(2x+e)$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f* calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

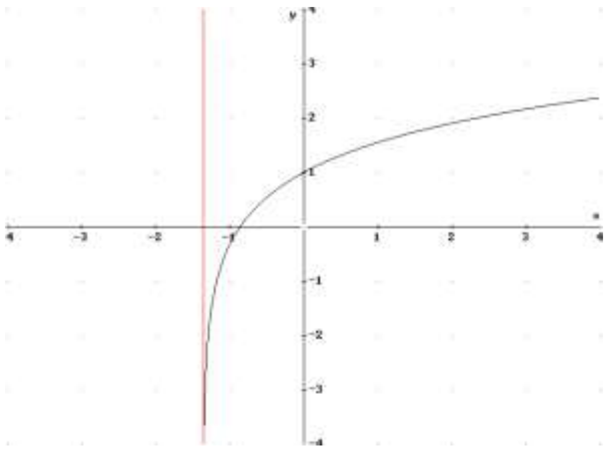
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con los ejes.

Corte con el eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow \ln(2x+e)=0\Rightarrow e^{0}=2x+e\Rightarrow x=\dfrac{1-e}{2}$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\ln e\Rightarrow y=1$

La recta $x=\dfrac{-e}{2}$ es una asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to -\frac{e}{2}} \ln(2x+e)=-\infty$



b) Calculamos la integral $\int \ln(2x+e)\,dx$ que es por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(2x+e);\ \ du=\dfrac{2}{2x+e}\,dx \\ dv=dx\qquad ;\quad v=x \end{array}}$$

$$\int \ln(2x+e)\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}\,dx$$

La integral que sale es racional, dividimos y la hacemos

$$\int \ln(2x+e)\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\left(1-\frac{e}{2x+e}\right)dx =$$

$$x\cdot\ln(2x+e)-\int dx+\frac{e}{2}\int\frac{2}{2x+e}\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)+C$$

Calculamos el área que nos piden.

$$\int_{\frac{1-e}{2}}^{0} \ln(2x+e)dx=\left[x\cdot\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)\right]_{\frac{1-e}{2}}^{0}=\frac{e}{2}-\frac{-1+e}{2}=\frac{1}{2}\ u^{2}$$

Considera la función f definida por $f(x)=a\,x\ln(x)-b\,x$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x=1$ y que $\int_1^2 f(x)\,dx = 8\ln(2)-9$

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=a\ln(x)+a-b$

Extremo relativo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow a-b=0 \Rightarrow a=b$

Vamos a calcular la integral $I=\int (ax\cdot ln\,x-ax)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=ax\,dx;\ v=\dfrac{ax^2}{2} \end{array}}$$

$$I=\int (ax\cdot ln\,x-ax)\,dx=\frac{ax^2}{2}\cdot ln\ x-\frac{1}{2}\int ax\,dx-\frac{ax^2}{2}=\frac{ax^2}{2}\cdot ln\ x-\frac{1}{2}\left(\frac{ax^2}{2}\right)-\frac{ax^2}{2}=\frac{ax^2}{2}\cdot ln\ x-\frac{3ax^2}{4}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\left[\frac{ax^2\ln x}{2}-\frac{3ax^2}{4}\right]_1^2=\left[\frac{4a\ln 2}{2}-\frac{12a}{4}\right]-\left[-\frac{3a}{4}\right]=\frac{4a\ln 2}{2}-\frac{9a}{4}=8\ln(2)-9\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a\ln 2-\frac{9a}{4}=8\ln 2-9\Rightarrow a=4$$

Luego, $a=b=4$

Considera la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-2x}$.
a) Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=-2ex$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $y=-2ex$ y el eje de ordenadas.
c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

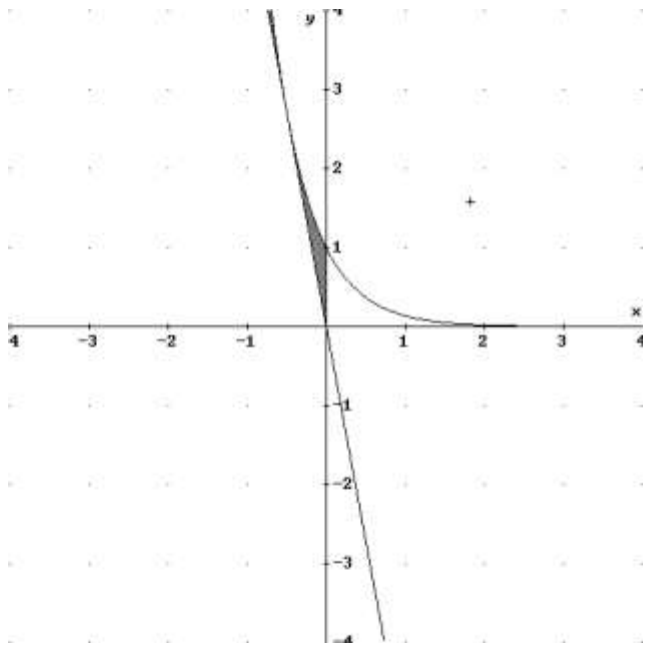
R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es $-2e$. Calculamos la derivada de la función y la igualamos a $-2e$

$$f'(x)=-2e^{-2x}=-2e\Rightarrow e^{-2x}=e\Rightarrow -2x=1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Luego, el punto es: $\left(-\frac{1}{2},e\right)$

b) Hacemos el dibujo



c) Calculamos el área del recinto:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(e^{-2x}+2ex\right)dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{e}{2}+\frac{e}{4}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\,u^2$$