

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 5: INTEGRALES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = 6x - x^2$  y  $g(x) = |x^2 - 2x|$ .

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$  y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de  $f$  y  $g$ .

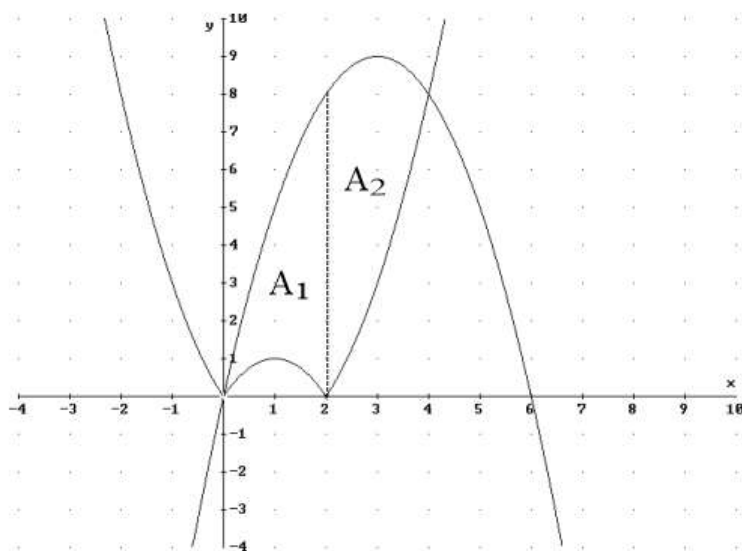
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función  $f(x) = 6x - x^2$  que es una parábola, calculando el vértice y haciendo una

tabla de valores. Abrimos la función  $g(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  y hacemos el

dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el  $(0,0)$  y  $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_0^2 [(6x - x^2) - (-x^2 + 2x)] dx + \int_2^4 [(6x - x^2) - (x^2 - 2x)] dx = \\ &= \int_0^2 4x dx + \int_2^4 (-2x^2 + 8x) dx = [2x^2]_0^2 + \left[ -\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = 8 + \left( -\frac{128}{3} + 64 \right) - \left( -\frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{56}{3} u^2 \end{aligned}$$

Considera las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $f(x) = 3 - x^2$  y  $g(x) = -\frac{x^2}{4}$ .

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$  y comprueba que también es tangente a la gráfica de  $g$ . Determina el punto de tangencia con la gráfica de  $g$ .

b) Esboza el recinto limitado por la recta  $y = 4 - 2x$  y las gráficas de  $f$  y  $g$ . Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

**MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.**

En el examen original había un error. Las gráficas estaban cambiadas, es decir,  $f$  era  $g$  y  $g$  era  $f$ .

### R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la tangente es  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Calculamos:  $f(1) = 3 - 1^2 = 2$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

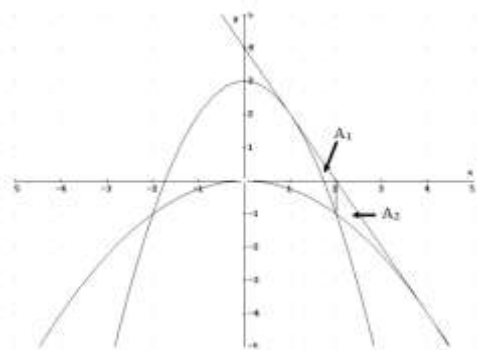
Sustituimos y calculamos la tangente:  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$

Comprobamos que también es tangente a  $g$

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\frac{x^2}{4} \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -2x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Luego, es tangente y el punto de tangencia es  $(4, -4)$ .

b) Hacemos el dibujo de las dos parábolas y la recta.



Los puntos de corte son:  $(1, 2)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-2, -1)$  y  $(4, -4)$

c) Calculamos el área que nos piden.

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \int_1^2 [(-2x + 4) - (3 - x^2)] dx + \int_2^4 [(-2x + 4) - \left(-\frac{x^2}{4}\right)] dx = \\ &= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 = \\ &= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + \left(\frac{64}{12} - 16 + 16\right) - \left(\frac{8}{12} - 4 + 8\right) = 1 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = e^{2-x}$

- Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 2$ .
- Esboza el recinto limitado por la gráfica de  $f$ , el eje de ordenadas y la recta  $x + y = 3$ .
- Calcula el área del recinto indicado.

**MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.**

## R E S O L U C I Ó N

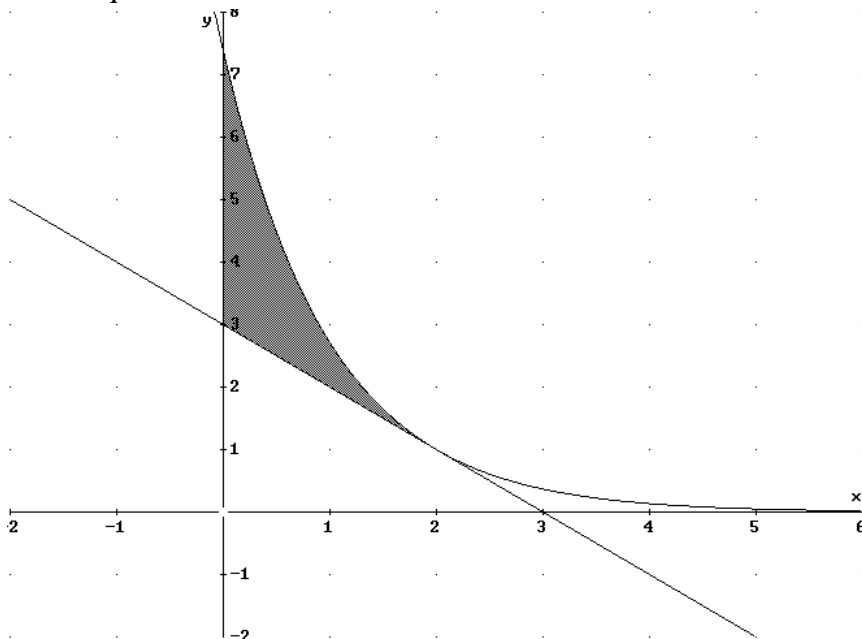
a) La ecuación de la recta tangente será  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$

$$- f(2) = e^0 = 1$$

$$- f'(x) = -e^{2-x} \Rightarrow f'(2) = -e^0 = -1$$

Sustituyendo, tenemos que:  $y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 3$

b) Dibujamos el recinto que nos dicen.



c) Calculamos el área del recinto

$$\int_0^2 [(e^{2-x}) - (-x + 3)] dx = \int_0^2 (e^{2-x} + x - 3) dx = \left[ -e^{2-x} + \frac{x^2}{2} - 3x \right]_0^2 = (-e^0 + 2 - 6) - (-e^2) = e^2 - 5 \text{ u}^2$$

Considera la función  $f : \left(-\frac{e}{2}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \ln(2x+e)$ , donde  $\ln$  denota logaritmo neperiano.

a) Haz un esbozo de la gráfica de  $f$  calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de  $f$  y los ejes de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

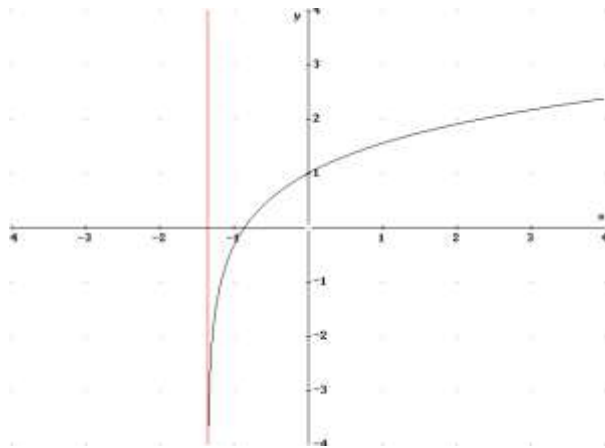
### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Corte con el eje X} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \ln(2x+e) = 0 \Rightarrow e^0 = 2x+e \Rightarrow x = \frac{1-e}{2}$$

$$\text{Corte con el eje Y} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = \ln e \Rightarrow y = 1$$

La recta  $x = \frac{-e}{2}$  es una asíntota vertical, ya que  $\lim_{x \rightarrow -\frac{e}{2}} \ln(2x+e) = -\infty$



b) Calculamos la integral  $\int \ln(2x+e) dx$  que es por partes.

$$\begin{aligned} u &= \ln(2x+e); & du &= \frac{2}{2x+e} dx \\ dv &= dx & ; & v = x \end{aligned}$$

$$\int \ln(2x+e) dx = x \cdot \ln(2x+e) - \int \frac{2x}{2x+e} dx$$

La integral que sale es racional, dividimos y la hacemos

$$\begin{aligned} \int \ln(2x+e) dx &= x \cdot \ln(2x+e) - \int \frac{2x}{2x+e} dx = x \cdot \ln(2x+e) - \int \left(1 - \frac{e}{2x+e}\right) dx = \\ &= x \cdot \ln(2x+e) - \int dx + \frac{e}{2} \int \frac{2}{2x+e} dx = x \cdot \ln(2x+e) - x + \frac{e}{2} \ln(2x+e) + C \end{aligned}$$

Calculamos el área que nos piden.

$$\int_{\frac{1-e}{2}}^0 \ln(2x+e) dx = \left[ x \cdot \ln(2x+e) - x + \frac{e}{2} \ln(2x+e) \right]_{\frac{1-e}{2}}^0 = \frac{e}{2} - \frac{-1+e}{2} = \frac{1}{2} u^2$$